Erratum. Exercice 1-8-8, nouvelle rédaction
Les sphères S^3, S^7

1. En reprenant les notations du § 1-8-5 question 3, vérifier que l'ensemble des matrices complexes d'ordre deux de la forme
$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$$
est un corps isomorphe à $\mathbb{H}$, ce qui prolonge le difféomorphisme de S^3 sur $SU(2)$. Les matrices complexes 2×2 ainsi associées à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sont appelées matrices de **Pauli**.

2. Le difféomorphisme vu au § 1-8-5 question 3 permet de doter la sphère S^3 d'une structure de groupe de Lie par transport. D'autre part, S^3 est un groupe de Lie en tant que groupe multiplicatif des quaternions unitaires. Comparer ces deux structures de groupe de Lie sur S^3.

3. Démontrer que le morphisme de S^3 sur $SO\left(\mathbb{R}^3\right)$ envisagé au § 1-8-7-1 question 5 (qui est donc un morphisme de groupes de Lie) est un revêtement.

4. $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension 8. Les éléments de $\mathbb{O}$ sont notés $\alpha = (q_1, q_2)$. $\mathbb{O}$ est muni du produit scalaire pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^8$ est orthonormée.

   (a) $\mathbb{O}$ est muni du produit défini par
   $$(q_1, q_2)(q_1', q_2') = \left(q_1 q_1' - \overline{q_2'} q_2, q_2' q_1 + q_2 \overline{q_1'}\right).$$
   Démontrer que $\mathbb{O}$ est une algèbre non associative ni commutative, l'élément neutre est $\varepsilon = (e, 0)$, on l'appelle algèbre des **octaves de Cayley**.
   Ecrire la table du produit pour les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^8$.
   Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{O}$, l'application $\beta \longmapsto \beta\alpha$ est une bijection de $\mathbb{O}$ (on dit que $\mathbb{O}$ est une algèbre à division).

   (b) On appelle conjugué de l'octave $\alpha = (q_1, q_2)$, l'octave $\overline{\alpha} = (\overline{q_1}, -q_2)$. Vérifier que $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^8$ et que $N(\alpha\beta) = N(\alpha) N(\beta)$.
   L'ensemble des octaves unitaires, identifié à la sphère euclidienne S^7, est-il un groupe pour ce produit ?

Remarque

Il est possible de démontrer (Samelson, 1940) que les seules sphères euclidiennes qui sont des groupes de Lie sont S^1 et S^3.