

c'est une hypothèse de modélisation et non une déduction, plus gênante est la question de l'unicité qui est postulée tant que l'expérience ne la remet pas en cause.

- On suppose qu'à chaque instant, $f_2(t)$ est colinéaire au vecteur fixe \mathbf{g} , et à un instant t_0 , $\dot{M}(t_0)$ est colinéaire à \mathbf{g} .

Il est facile (prendre deux primitives) d'en déduire que le mouvement est rectiligne sur une droite dirigée par \mathbf{g} , d'où la paramétrisation de la trajectoire par l'abscisse $x(t)$ de $M(t)$ sur cette droite, orientée par la verticale ascendante, avec origine en $x(0)$.

- Autre hypothèse sur f_2 : les trois phases du mouvement.

Phase 0. Pour $t \leq 0$, avec $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, on suppose que M est soumis à l'action verticale ascendante d'un ressort de raideur k , de longueur à vide L_v , dont l'extrémité supérieure est un point $A(t)$, d'abscisse $X(t)$, l'extrémité inférieure en $M(t)$. La situation observée est statique, donc $f(t)$ est constamment nul et par suite la longueur du ressort $L(t) = X(t) - x(t) = X(t)$ est une constante notée X_0 .

Avec le modèle simplifié usuel de l'action d'un ressort, cela donne

$$0 = -mg + k(X_0 - L_v).$$

Quatre de ces cinq constantes déterminent la cinquième. Expérimentalement, c'est k qui est ainsi calculé.

Phase 1. Sur un intervalle de temps $[0, T]$, le point A est animé d'un mouvement vertical, qui génère une variation de la longueur $L(t)$, donc de $f_2(t) = k(L(t) - L_v)$, de sorte que

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) &= -mg + k(L(t) - L_v) \\ &= -mg + k(X(t) - x(t) - L_v) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) + k x(t) &= -mg + k(X(t) - L_v) \\ &= k(X(t) - X_0) \quad (1) \end{aligned}$$

Si le mouvement de A est prescrit, le mouvement de M est déterminé par la donnée supplémentaire de $\dot{x}(0)$.

On fait l'hypothèse

- que A est entraîné par un fil inextensible enroulé sur une poulie de rayon R , de vitesse angulaire $\omega(t)$ (donc $\dot{X}(t) = R\omega(t)$),

- que la rotation est liée au couple moteur Γ et à la vitesse angulaire sans charge ω_{sc} par

$$\omega(t) = \omega_{sc} - \alpha\Gamma, \quad \omega_{sc} \text{ et } \alpha \text{ constants}$$

- que le couple moteur est lié à la tension du fil par

$$\Gamma = Rk(X(t) - x(t) - L_v).$$

Il en résulte que

$$\dot{X}(t) = R\omega_{sc} - \alpha k R^2 (X(t) - x(t) - L_v)$$

Il est commode de poser $\beta = \alpha k R^2$, $\mathcal{V} = R\omega_{sc} + \beta L_v$, ce qui conduit à l'équation

$$\dot{X}(t) + \beta X(t) - \beta x(t) = \mathcal{V} \quad (2)$$

La résolution du système (x, X) détermine l'effort non donné

$$f_2(t) = k (X(t) - x(t) - L_v).$$

Phase 2. Lorsque le gobelet atteint une position $x(t_1)$ donnée, un capteur optique coupe l'alimentation du moteur qui reste au repos pour $t \geq t_1$. Le point d'attache est alors fixe.

3 Phase 1 du mouvement (modèle simplifié)

Dans le cas où le mouvement du gobelet n'a pas d'influence sur la vitesse de rotation de la poulie, c'est à dire $\omega = \omega_{sc}$ et donc $\alpha = \beta = 0$.

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (X - X_0) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = v_0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x(0), \dot{x}(0), X(0)) = (0, 0, X_0) & (3) \end{cases}$$

La solution est classique :

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + v_0 t, \quad X(t) = v_0 t + X_0.$$

4 Résolution de l'équation du mouvement en phase 1 avec $\beta \neq 0$

4.1 Le problème de Cauchy

Le système obtenu, de fonctions inconnues x et X , s'écrit

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = k(X - X_0) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} + \beta X - \beta x = \mathcal{V} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x(0), \dot{x}(0), X(0)) = (0, 0, X_0) & (3) \end{cases}$$

Il importe d'envisager le problème de Cauchy (autrement-dit, ne pas oublier (3)), faute de quoi l'on ne peut évoquer l'unicité de la solution dans ce qui suit.

Cette phase du mouvement est expérimentalement définie par $t \in [0, T]$, intervalle de temps à l'extérieur duquel les efforts sont différents.

La cohérence vient de ce que le système étant linéaire, la solution maximale existe à tout instant.

4.2 Choix de la méthode

Observons que l'équation (1), compte-tenu de (2), s'écrit

$$\frac{m}{\beta} (\ddot{X} + \beta \dot{X}) + \frac{k}{\beta} (\dot{X} + \beta X - \mathcal{V}) = k(X - X(0))$$

c'est à dire

$$\frac{m}{\beta} \ddot{X} + m\dot{X} + \frac{k}{\beta} X = \mathcal{V} - X(0),$$

ce qui conduit à une équation linéaire scalaire du second ordre en \dot{X} , que l'on sait résoudre.

Cependant, les formules connues donnant les solutions de ces équations linéaires scalaires proviennent de la transformation en équations vectorielles du premier ordre.

Rappelons le principe général qui permet de ne développer qu'une seule théorie.

Qu'elles soient linéaires ou non, les équations scalaires d'ordre $n > 1$ seront toujours ramenées à des équations vectorielles d'ordre 1 dans \mathbb{R}^n , en remplaçant

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

par

$$\begin{aligned} x_1 &= x, x_2 = x', \dots, x_{n-1} = x^{(n-2)}, x_n = x^{(n-1)} \\ (x_1, \dots, x_n)' &= (x', x'', \dots, x^{(n-1)}, f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})) \end{aligned}$$

autrement dit, par une équation vectorielle de la forme $\varphi' = F(\varphi)$.

Pour les équations scalaires d'ordre deux, le plan dans lequel on regarde l'évolution de la fonction

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), x'(t))$$

est appelé le **plan des phases**.

Par exemple, l'équation scalaire d'ordre 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ équivaut à l'équation vectorielle d'ordre 1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Ici, le système envisagé sera écrit avec la fonction inconnue $Y = (x, \dot{x}, X)$, sous la forme

$$\begin{cases} \dot{Y} = MY + B \\ Y(0) = (x(0), \dot{x}(0), X(0)) \end{cases},$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 \\ \beta & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 X_0 \\ \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Supposons connue la propriété suivante : L'ensemble des solutions réelles (maximales) de l'équation $Y' = MY$ est un sous-espace de dimension 3, de l'espace des fonctions C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 , et les solutions de l'équation complète $\dot{Y} = MY + B$ s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée $Y' = MY$ (c'est la structure affine de dimension trois de l'ensemble des solutions de $\dot{Y} = MY + B$).

4.3 Recherche d'une solution particulière

Cherchons une solution Y_{sp} pour laquelle $\ddot{x} = 0$ (motivation d'origine expérimentale : recherche d'un mouvement uniforme), sans se préoccuper de la condition de Cauchy pour l'instant.

L'équation est

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ X \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ X \end{pmatrix} + B,$$

ce qui donne aussitôt

$$\begin{cases} X - x = X_0 \\ \beta(x - X) + \mathcal{V} = \dot{X} \end{cases}.$$

La première équation donne $\dot{X} = \dot{x}$, donc $\dot{x} = -\beta X_0 + \mathcal{V}$.

Finalement, en notant $v_0 = \mathcal{V} - \beta X_0$ la vitesse moyenne du gobelet,

$$\begin{aligned} x_{sp}(t) &= v_0 t \\ X_{sp}(t) &= v_0 t + X_0. \end{aligned}$$

4.4 Résolution exacte

Etape 1. Quelques informations.

Dans le cas d'une équation scalaire (à coefficient constant ou non) $\dot{y} = ay$, les solutions sont bien connues, elles sont de la forme $y(t) = y(0) \exp \Lambda(t)$, où Λ est la primitive de a qui s'annule à $t = 0$.

Sachant que pour tout réel x , $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, et par analogie, on prolonge la fonction exponentielle aux matrices en posant $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, avec $A^0 = I$, pour toute matrice réelle ou complexe A carrée d'ordre n ,

On démontre que la série est convergente. Par contre, une différence importante avec l'exponentielle réelle ou complexe tient à la non commutativité de la multiplication matricielle.

On ne peut écrire $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$ que dans le cas où $AB = BA$.

Il en résulte que $\exp A$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

En particulier, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$$

En effet,

$$\frac{\exp((t + \Delta t)A) - \exp(tA)}{\Delta t} = \frac{\exp(\Delta t A) - I}{\Delta t} \exp(tA)$$

et la limite lorsque Δt tend vers 0 donne le résultat.

Pour tout vecteur $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto Y(t) = \exp(tA)(Y_0)$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , est ainsi l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Etape 2. Une solution exacte du problème posé.

Revenons à la matrice M du lève-charge. La valeur à $t = 0$ de la solution particulière n'est pas $Y_{sp}(0) = (0, 0, X_0)$ comme on voulait, mais ce n'est pas gênant, il suffit d'écrire

$$Y(t) = \exp(tM)(Y_0 - Y_{sp}(0)) + Y_{sp}(t)$$

pour obtenir la solution cherchée.

En remplaçant,

$$Y(t) = \exp(tM) \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 t \\ v_0 \\ v_0 t + X_0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Calcul approché de l'exponentielle

En programmant le calcul de $\sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} M^n$, on a évidemment une approximation de $Y(t)$.

La question de savoir combien de termes sont nécessaires pour avoir une précision donnée est plus difficile. Disons seulement que pour un choix d'une norme matricielle qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (norme d'algèbre), l'erreur c'est à dire le reste $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} M^n$ est majoré en norme par $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(|t| \|M\|)^n}{n!}$, ce qui est le reste d'une série numérique se somme $\exp(|t| \|M\|)$, et l'on sait que de telles séries convergent très rapidement.

4.6 Calcul exact de l'exponentielle

4.6.1 Quelques informations

Il n'est pas commode de se limiter au concept d'exponentielle matricielle pour traiter les changements de base.

On définit plus généralement une notion d'exponentielle sur toute algèbre normée complète sur le corps des réels ou des complexes, possédant les propriétés indiquées ci-dessus (cf. l'annexe).

Pour un endomorphisme L d'un espace vectoriel E de dimension finie, notons $L_{\mathcal{B}}$ la matrice de L dans une base \mathcal{B} de E .

Si \mathcal{B} , \mathcal{B}' sont deux bases de E , et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on démontre la relation

$$\exp(L_{\mathcal{B}'}) = P^{-1} \exp(L_{\mathcal{B}}) P.$$

Pratiquement, si l'endomorphisme L est diagonalisable, notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la matrice de L dans une base \mathcal{B}' de diagonalisation. On voit immédiatement que $\exp D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Une équation linéaire de la forme

$$\frac{d}{dt} U = L(U)$$

dont les solutions sont des arcs paramétrés $t \mapsto U(t)$ tracés sur E , est supposée donnée dans une base \mathcal{B} de E sous la forme

$$\frac{d}{dt} Y = AY,$$

où $A = L_{\mathcal{B}}$, $Y = U_{\mathcal{B}}$.

Dans la base \mathcal{B}' , l'équation $\frac{d}{dt} U = L(U)$ s'exprime par

$$\frac{d}{dt} Z = DZ,$$

avec $Z = U_{\mathcal{B}'} = P^{-1}Y$, si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

La solution $U(t) = \exp(tL)(U_0)$ s'écrit dans la base \mathcal{B}' sous la forme

$$Z(t) = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) Z_0,$$

en multipliant par $P^{-1}P$, on retrouve évidemment

$$Y(t) = P \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) Z_0 = \exp(tA) Y_0.$$

En pratique, on voit que le **calcul de P^{-1} est inutile** pourvu que l'on sache exprimer Z_0 .

4.6.2 Application au problème du lève-charge.

Considérons que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 \\ \beta & 0 & -\beta \end{pmatrix}$ du lève-charge est la matrice d'un endomorphisme L de $E = \mathbb{C}^3$ dans la base canonique \mathcal{B} . Le sous-espace \mathbb{R}^3 est évidemment stable, de sorte que L est en fait un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

Le polynôme caractéristique de M est

$$x(x^2 + \beta x + \omega_0^2).$$

Dans les conditions expérimentales, $\beta < 2\omega_0$, donc M possède une valeur propre réelle $\lambda_0 = 0$, et deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2} \text{ noté } a + ib \text{ et } \bar{\lambda}.$$

En tant qu'endomorphisme de \mathbb{C}^3 , L est donc diagonalisable.

Calculons une base de vecteurs propres. Pour $\lambda_0 = 0$, prenons $W = (1, 0, 1)$ comme base de la droite associée.

Pour λ , le calcul est détaillé ci-dessous (méthode élémentaire), on prend

$$Z_1 = \left(\frac{\beta}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}, -\omega_0^2, \beta \right) = (-a + ib, -\omega_0^2, \beta),$$

et pour $\bar{\lambda}$, on trouve $Z_2 = (-a - ib, \omega_0^2, \beta)$.

La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base $\mathcal{B}' = (Z_1, Z_2, W)$ est donc

$$P = \begin{pmatrix} -a + ib & -a - ib & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer $Z_0 = (u, v, w)$ tel que $(0, -v_0, 0) = PZ_0$, soit

$$\begin{cases} (-a + ib)u - (a + ib)v + w = 0 \\ -\omega_0^2(u + v) = -v_0 \\ \beta(u + v) + w = 0 \end{cases}.$$

On trouve (à la main ou avec un solveur)

$$u = \frac{1}{2b\omega_0^2}(bv_0 - iav_0 - i\beta v_0), v = \frac{1}{2b\omega_0^2}(iav_0 + bv_0 + i\beta v_0), w = -\beta \frac{v_0}{\omega_0^2}.$$

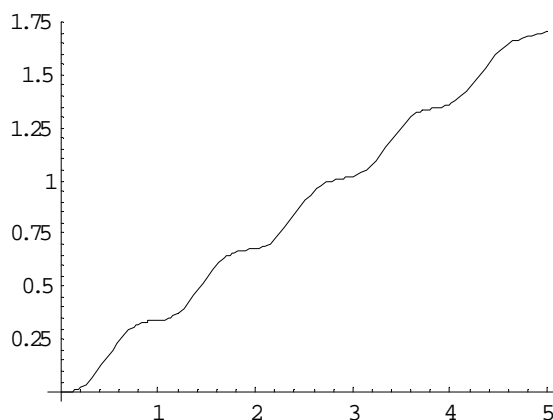
Finalement,

$$Y(t) = \exp(tM) Y_0 = P \operatorname{diag} \left(e^{t\lambda}, e^{t\bar{\lambda}}, 1 \right) Z_0.$$

L'expression formelle de $x(t)$, première projection de $Y(t)$, n'est pas simple.

Le calcul approché conduit à la courbe ci-dessous, compte tenu des données numériques suivantes, exprimées en unités S.I. :

m	0.074
k	3.156
x_0	0.29
L_v	0.06
ω_{sc}	13.61
R	0.028
α	55



4.6.3 Une méthode plus élémentaire adaptée à la matrice M

En dimension trois, la situation de la matrice M est assez générale pour que la méthode qui va suivre soit connue. En effet, tout polynôme de degré trois à coefficients réels possède une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires), écrivons polynôme caractéristique $(x - \lambda_0)Q(x)$.

Si Q possède deux racines réelles distinctes, l'endomorphisme est \mathbb{R} -diagonalisable.

Si Q possède une racine double λ , l'endomorphisme n'est \mathbb{R} -diagonalisable que si le sous-espace propre associé est un plan.

Si Q possède deux racines complexes, elles sont conjuguées (c'est le cas ici), et l'on dispose alors de la méthode élémentaire suivante pour calculer $\exp tM$.

Propriété

Soit A une matrice carrée réelle de taille 3×3 , possédant une valeur propre réelle λ_0 et deux valeurs propres complexes (non réelles) conjuguées λ et $\bar{\lambda}$.

Notons $W \in \mathbb{R}^3$ un vecteur propre associé à la valeur propre réelle λ_0 .

Si Z est un vecteur propre associé à $\lambda = a + ib$, ce vecteur de \mathbb{C}^3 s'écrit $Z = U + iV$, avec $U \in \mathbb{R}^3$ et $V \in \mathbb{R}^3$.

Alors,

1) (U, V, W) est une base de \mathbb{R}^3 .

2) Les fonctions

$$\varphi_1(t) = e^{at} ((\cos bt)U - (\sin bt)V)$$

$$\varphi_2(t) = e^{at} ((\sin bt)U + (\cos bt)V)$$

$$\psi(t) = e^{\lambda_0 t} W, \quad t \in \mathbb{R}$$

sont des solutions de l'équation $Y' = AY$.

3) Elles sont linéairement indépendantes donc forment une base de solutions maximales de l'équation $Y' = AY$.

Toute solution de cette équation est donc de la forme $Y(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\psi(t)$, et

$$Y(0) = a_1U + a_2V + a_3W.$$

Par unicité, on a bien $Y(t) = \exp(tA)(Y_0)$, il suffit d'exprimer Y_0 dans la base (U, V, W) pour déterminer (a_1, a_2, a_3) .

Démonstration de la propriété.

1)

a) On calcule les vecteurs AU et AV en fonction de U et V .

$$\begin{aligned} AZ &= AU + iAV \\ &= (a + ib)(U + iV) \\ &= (aU - bV) + i(bU + aV) \end{aligned}$$

donc

$$AU = aU - bV \text{ et } AV = bU + aV.$$

b) On vérifie que U et V ne sont pas nuls.

Si $U = 0$, alors $V = 0$ et inversement car $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

c) On prouve que U et V sont indépendants.

Si $U = kV$, avec k réel, alors $AU = kAV$, donc

$$\begin{aligned} kAU &= kaU - kbV = (ka - b)U \\ k^2AV &= k^2bU + k^2aV = (k^2b + ka)U \end{aligned}$$

et par suite, $k^2 = -1$, ce qui est exclu.

d) On prouve que W n'appartient pas au plan engendré par (U, V) .

Si $W = rU + sV$, alors $AW = \lambda_0W = r(aU - bV) + s(bU + aV)$, donc (d'après c)

$$\begin{aligned} r(a - \lambda_0) + sb &= 0 \\ -rb + s(a - \lambda_0) &= 0 \end{aligned}$$

et par suite $r = s = 0$ sachant que λ n'est pas réel.

Par ailleurs, on peut prendre $W = (1, 0, 1)$.

2) ψ , φ_1 et φ_2 sont des solutions. Vérifions-le par exemple pour φ_2 .

$$\begin{aligned} A\varphi_2(t) &= e^{at}((\sin bt)AU + (\cos bt)AV) \\ &= e^{at}((\sin bt)(aU - bV) + (\cos bt)(bU + aV)) \\ &= ae^{at}((\sin bt)U + (\cos bt)V) + be^{at}((\cos bt)U - (\sin bt)V) \\ &= \dot{\varphi}_2(t). \end{aligned}$$

3) Une relation de dépendance entre les solutions s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) + c\psi(t),$$

avec $t = 0$, cela donne une relation de dépendance entre U, V, W donc $a = b = c = 0$.

■

Dans le cas de la matrice M du lève-charge, il reste à calculer un vecteur propre $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ de M , associé à la valeur propre $\lambda = a + ib$, en posant $a = -\frac{\beta}{2}$, et $b = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}$.

L'équation $MZ = \lambda Z$ équivaut à

$$\begin{cases} Z_2 = (a + ib) Z_1 \\ \omega_0^2 (Z_3 - Z_1) = (a + ib) Z_2 \\ \beta (Z_1 - Z_3) = (a + ib) Z_3 \end{cases} .$$

On est certain que le sous-espace propre est une droite complexe (plan réel), donc paramétrable par l'une des coordonnées de Z . Un choix simple est $Z_3 = 1$.

Le système donne $\beta Z_2 + \omega_0^2 Z_3 = 0$, donc

$$Z_2 = -\frac{\omega_0^2}{\beta} \text{ puis } Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{b}{\beta}i.$$

Finalement,

$$Z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\beta}\omega_0^2, 1\right) + i \left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}, 0, 0\right) = U + iV$$

donc

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\beta}\omega_0^2 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \frac{b}{\beta} = \frac{1}{2\beta}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.7 Une expression de la solution exacte

Reprenons la solution trouvée au § 2-3,

$$\begin{aligned} Y(t) &= \exp(tM) \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 t \\ v_0 \\ v_0 t + X_0 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t) + a_3 \psi(t) + \begin{pmatrix} v_0 t \\ v_0 \\ v_0 t + X_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La condition initiale détermine les coefficients a_i ,

$$Y_0 = (0, 0, X_0) = a_1 U + a_2 V + a_3 W + (0, v_0, X_0)$$

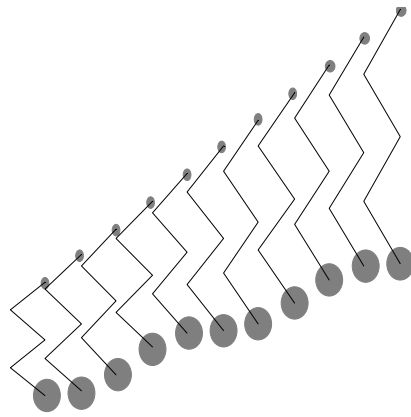
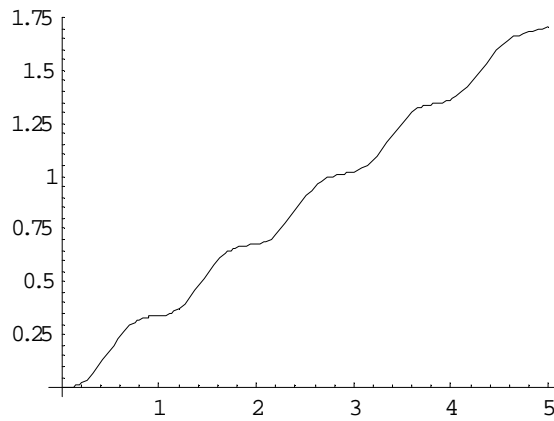
soit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\beta}\omega_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \frac{b}{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

autrement-dit,

$$a_1 = \frac{v_0\beta}{\omega_0^2}, a_2 = \frac{v_0\beta^2}{\omega_0^2\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}}, a_3 = -a_1.$$

Représentation de la première projection x de Y (on retrouve évidemment la courbe déjà obtenue) :



Remarque 1

La présence des fonctions trigonométriques dans l'expression de $\exp(tM)$ n'est pas surprenante. En effet, dans la base (U, V, W) , M est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices commutent, l'exponentielle de la somme est donc le produit des exponentielles, la matrice diagonale fournit le terme en e^{at} et la constante $e^0 = 1$. L'exponentielle de la matrice antisymétrique se calcule directement avec la définition, par récurrence, et fait apparaître le développement en série entière de $\sin bt$ et $\cos bt$.

Remarque 2

Pour le calcul de $\exp tM$, on voit que cette méthode (particulière) ne repose pas sur le même principe que la méthode (plus générale) précédente. Dans la première méthode, on effectue un changement de base dans \mathbb{C}^3 , et l'on a besoin de la notion de l'exponentielle d'un endomorphisme (pas seulement d'une matrice). Ici il s'agit d'exprimer $\exp tM$ dans une base dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation $Y' = MY$.

5 Phase 2 du mouvement

A un instant t_1 , le moteur est arrêté, X reste donc constant pour $t \geq t_1$. En notant X_1 cette constante, l'équation du mouvement du globe s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 (X_1 - X_0) \\ x(t_1) &= x_1, \dot{x}(t_1) = x_1'. \end{aligned}$$

Moyennant une translation de l'origine du temps, le mouvement peut être mis sous la forme

$$x(t) = (X_1 - X_0) + x_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\left(\frac{(x_1 - X_1 + X_0)\omega_0}{x_1'}\right), \\ x_{\max} &= \frac{x_1'}{\omega_0 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

6 Annexe 1 (maths) Exponentielle d'un endomorphisme

Soit (A, N) une \mathbb{K} -algèbre de Banach, e l'unité de A , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Proposition 1 *Pour tout élément $a \in A$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!}$ (de premier terme e), est convergente dans A .*

Démonstration

Pour deux entiers m, n tels que $n < m$, on peut majorer la norme de la différence des sommes partielles de rang m et n ,

$$\begin{aligned} N\left(\sum_{k=n+1}^m \frac{a^k}{k!}\right) &\leq \sum_{k=n+1}^m N\left(\frac{a^k}{k!}\right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{(N(a))^k}{k!}, \end{aligned}$$

l'hypothèse sur N (norme d'algèbre) intervenant dans la deuxième majoration.

La série réelle $\sum \frac{(N(a))^k}{k!}$ étant convergente, la suite des sommes partielles est de Cauchy, il en est donc de même dans A pour la série $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!}$, qui est convergente si A est complet. ■

Definition 2 On définit une application notée \exp , de A dans A , en posant $\exp(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$.

Il en résulte que $N(\exp(a)) \leq \exp(N(a))$.

Il est clair que $\exp(0) = e$.

Exemple 3 Si E est un espace vectoriel de dimension finie, pour toute norme d'algèbre sur $L(E)$, la fonction exponentielle de l'algèbre $L(E)$ est définie par

$$\exp(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!} = I_E + L + \frac{L \circ L}{2} + \frac{L \circ L \circ L}{3!} + \dots$$

Exemple 4 Pour toute norme d'algèbre sur $M(n, \mathbb{K})$, la fonction exponentielle de l'algèbre $M(n, \mathbb{K})$ est définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I_n + M + \frac{M^2}{2} + \dots$$

La proposition suivante relie ces deux fonctions exponentielles.

Proposition 5 Soit $L \in L(E)$, E (de dimension finie n) et $M(n, \mathbb{K})$ étant munis d'une norme d'algèbre.

a) Pour toute base \mathcal{B} de E , $\exp(L)_{\mathcal{B}} = \exp(L_{\mathcal{B}})$.

b) Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E , et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on a

$$\exp(L_{\mathcal{B}'}) = P^{-1} \exp(L_{\mathcal{B}}) P.$$

Démonstration

a) Si M est la matrice de L dans la base \mathcal{B} , pour tout entier p , la matrice de $\sum_{k=0}^p \frac{L^k}{k!}$ est $\sum_{k=0}^p \frac{M^k}{k!}$, et la matrice de la limite $\exp(L)$ est la limite $\exp(M)$, sachant que l'application $L \mapsto M = L_{\mathcal{B}}$ est linéaire, donc continue.

b) Le résultat précédent donne

$$\begin{aligned} \exp(L_{\mathcal{B}'}) &= \exp(P^{-1}L_{\mathcal{B}}P) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{P^{-1}M^kP}{k!} \right) \\ &= P^{-1}(\exp M)P, \end{aligned}$$

en raison de la continuité du produit. ■

7 Annexe 2 Enoncé tu T.D. donné aux étudiants

2009/2010 P.Aimé Lève-Charge T.D.MATH.

8 Phase I du mouvement (cas de l'expérience)

Cas $\beta \neq 0$.

1. Calculer les valeurs propres (réelles ou non) de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 \\ \beta & 0 & -\beta \end{pmatrix} \text{ du lève-charge, sous la condition } \beta < 2\omega_0.$$

Déterminer un vecteur propre $W \in \mathbb{R}^3$ associé à la valeur propre réelle λ_0 , et un vecteur propre $Z = (Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{C}^3$ associé à la valeur propre complexe $\lambda = a + ib$ dont la partie imaginaire b est > 0 . Le sous-espace propre associé à λ étant une droite vectorielle complexe, on peut fixer une coordonnée. Prendre par exemple $Z_3 = 1$.

2. En écrivant $Z = U + iV$, avec $U \in \mathbb{R}^3$, $V \in \mathbb{R}^3$, vérifier que (U, V, W) est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Soit A une matrice carrée réelle de taille 3×3 , possédant une valeur propre réelle λ , et notons $W \in \mathbb{R}^3$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. Vérifier que la fonction $\psi : t \mapsto e^{\lambda t} W$ est solution de l'équation différentielle $Y' = AY$.

Dans le cas de la matrice M du lève-charge, vérifier directement le résultat obtenu.

Comment s'appelle une solution constante pour un système dynamique ?

- (a) En calculant MZ de deux manières différentes, prouver que

$$MU = aU - bV \text{ et } MV = bU + aV.$$

(b) En déduire que les fonctions

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{at} ((\cos bt) U - (\sin bt) V) \\ \varphi_2(t) &= e^{at} ((\sin bt) U + (\cos bt) V)\end{aligned}$$

sont des solutions de $Y' = MY$.

(c) Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ sont des fonctions linéairement indépendantes, donc une base de solutions de l'équation homogène $Y' = MY$.

4. Pour tout vecteur $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, on peut affirmer qu'il existe une liste unique $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ telle que

$$t \longmapsto Y(t) = \exp(tA)(Y_0) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\psi(t)$$

soit solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = MY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} .$$

Pourquoi ? (répondre sans calculer quoi que ce soit !)

(a) Déterminer une solution Y_{sp} pour laquelle $\ddot{x} = 0$ (motivation d'origine expérimentale : recherche d'un mouvement uniforme), de l'équation du lève-charge $Y' = MY + B$, sans se préoccuper de la condition de Cauchy.

(b) La valeur à $t = 0$ de la solution particulière n'est pas $Y_{sp}(0) = (0, 0, X_0)$ comme on voulait, mais ce n'est pas gênant, il suffit d'écrire

$$Y(t) = \exp(tM)(Y_0 - Y_{sp}(0)) + Y_{sp}(t)$$

pour obtenir la solution cherchée.

Calculer alors (a_1, a_2, a_3) pour que, finalement, le mouvement du lève-charge dans la phase 1 de ce mouvement, s'écrive

$$\begin{aligned}Y(t) &= \exp(tM) \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 t \\ v_0 \\ v_0 t + X_0 \end{pmatrix} \\ &= a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\psi(t) + \begin{pmatrix} v_0 t \\ v_0 \\ v_0 t + X_0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

sachant que l'on veut $Y(0) = (0, 0, X_0)$.

N.B. C'est cette double formulation de la solution exacte qui peut être utilisée pour programmer une solution approchée (ne pas confondre solution théorique exacte, théorique approchée, expérimentale).

9 Phase I du mouvement (modèle simplifié)

On s'intéresse maintenant au cas où le mouvement du gobelet n'a pas d'influence sur la vitesse de rotation de la poulie, c'est à dire $\omega = \omega_{sc}$ et donc $\alpha = \beta = 0$.

Il n'est pas possible de reprendre le calcul précédent tel quel (division par β due au choix $Z_3 = 0$). On pourrait faire un autre choix, par exemple $Z_3 = 1$, mais il est plus simple de revenir au début, c'est à dire au système

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 (X - X_0) & (1) \\ \dot{X} = v_0 & (2) \\ (x(0), \dot{x}(0), X(0)) = (0, 0, X_0) & (3) \end{cases}$$

Ecrire la solution (pour l'équation homogène $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, on écrira la solution en sin plutôt qu'avec cos en raison de la condition $x(0) = 0$).

10 Phase II du mouvement

A un instant t_1 , le moteur est arrêté, X reste donc constant pour $t \geq t_1$. En notant X_1 cette constante, l'équation du mouvement du gobelet s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 (X_1 - X_0) \\ x(t_1) &= x_1, \dot{x}(t_1) = x'_1. \end{aligned}$$

Prouver que le mouvement peut être mis sous la forme

$$x(t) = (X_1 - X_0) + x_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\left(\frac{(x_1 - X_1 + X_0)\omega_0}{x'_1}\right), \\ x_{\max} &= \frac{x'_1}{\omega_0 \cos \varphi}. \end{aligned}$$