

# Chapitre 15

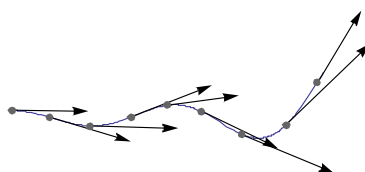
## Champs de vecteurs, équations différentielles (P. Aimé, 11/2014)

### 15.1 Vocabulaire et problématiques

#### 15.1.1 Champs de vecteurs autonomes

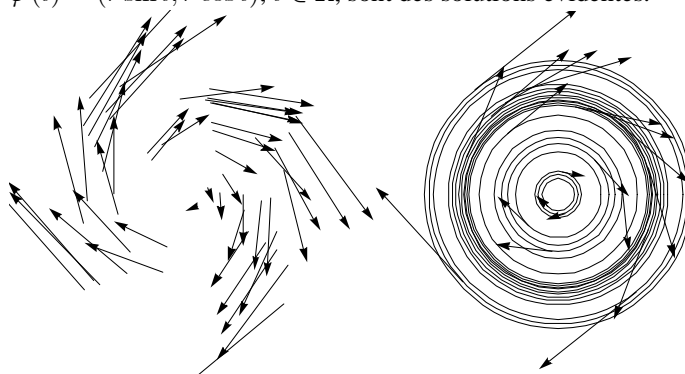
##### 15.1.1.1 Introduction

Pour un arc paramétré  $(J, \varphi)$  de classe  $C^1$ , tracé sur un espace affine  $E$ ,  $(\varphi(t), \varphi'(t))_{t \in J}$  est un champ de vecteurs tangents à l'arc.



Un problème à la fois inverse et plus général consiste en la donnée d'un champ de vecteurs  $\mathcal{X}$  sur un ouvert de  $E$  et la recherche des arcs  $(J, \varphi)$  tels qu'en tout point  $t \in J$ ,  $\varphi'(t) = \mathcal{X}(\varphi(t))$ .

Pour les figures ci-dessous,  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{X}(x, y) = (y, -x)$ . Les cercles paramétrés par  $\varphi(t) = (r \sin t, r \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sont des solutions évidentes.



Nous verrons que l'expression de  $\varphi$  n'est connue que pour des types très particuliers de champ  $\mathcal{X}$ , mais qu'à défaut, il est possible d'obtenir des renseignements géométriques intéressants sur les solutions.

Cette étude, dite des "systèmes dynamiques à temps continu", initiée ici et poursuivie dans les chapitres 15 et 23, est une branche active des mathématiques principalement depuis Poincaré.

Lorsque  $E$  est de dimension 1, en pratique  $E = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{X}$  est un champ scalaire et le point de vue géométrique est en général laissé de côté au profit d'un point de vue numérique : il s'agit de modéliser l'évolution d'une grandeur scalaire  $x$  en fonction du temps, les variations sont supposées dépendre continuellement du temps, et respecter une loi qui relie le taux de variation moyen  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , et la valeur de  $x$ , ce qui donne à la limite un taux de variation instantané (ou vitesse de variation) de la forme  $x'(t) = f(x(t))$ .

Le cas le plus élémentaire est celui de l'évolution d'un capital à intérêts composés ou d'une population microbienne ou toute autre grandeur scalaire, dont le taux de variation à chaque instant est proportionnel à l'effectif à cet instant, c'est à dire  $x'(t) = a x(t)$ . Lorsque ce modèle à taux  $a$  constant s'avère trop approximatif on peut le remplacer par une loi du type  $x'(t) = a(t) x(t)$  pour une fonction  $a(t)$  donnée.

Un exemple vectoriel est le modèle de **Lotka et Volterra** qui décrit l'évolution dans le temps d'une population  $(x(t), y(t))$  de deux espèces (proies et prédateurs). Le taux de variation de la population  $x(t)$  des proies est supposé de la forme  $x'(t) = kx(t) - ax(t)y(t)$ ,  $k$  et  $a$  étant des constantes positives. Ceci signifie

- qu'en l'absence de prédateurs, la population des proies varie exponentiellement,
- que le taux d'élimination des proies par l'action des prédateurs, est proportionnel à la population des uns et des autres.

Interpréter de même la relation  $y'(t) = -ly(t) + bx(t)y(t)$ .

Finalement, pour ce modèle,  $E = \mathbb{R}^2$  et

$$\mathcal{X}(x, y) = (kx - axy, -ly + bxy).$$

### 15.1.1.2 Vocabulaire

Nous utiliserons les définitions et notations du § 13-4-3. Rappelons en particulier, que si  $\mathcal{X}$  est un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  d'un espace affine  $E$ , il s'agit d'une section du fibré  $TU$  et que l'on écrit par abus  $\mathcal{X}(m)$  ou  $\mathcal{X}_m$  le vecteur du champ (élément de  $\vec{E}$ ), au lieu du vecteur lié  $\mathcal{X}(m) = (m, \mathcal{X}_m) \in \{m\} \times \vec{E} = T_m U$ .

Pour les représentations ci-dessus, les flèches tracées ont pour origine  $(x, y)$  et pour extrémité  $(x, y) + (y, -x)$ , ce sont des vecteurs liés.

Si  $\mathcal{X}$  est un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  d'un espace affine  $E$  de dimension  $d > 0$ , l'expression locale de  $\mathcal{X}$  dans un système de coordonnées curvilignes (une carte) est

$$\mathcal{X}(m) = \sum_{i=1}^d \mathcal{X}^i(m) \partial_i(m) \in \vec{E}.$$

Relativement à la carte canonique d'un repère orthonormal  $(O; (e_i))$  de  $E$ , la base naturelle  $(\partial_i(m))$  est indépendante de  $m$  et égale à  $(e_i)$ , et selon la dimension  $d = 1, 2, 3, n$ ,  $\mathcal{X}(m)$  s'écrit plutôt  $\mathcal{X}(x)$ ,  $\mathcal{X}(x, y)$ ,  $\mathcal{X}(x, y, z)$  ou  $\mathcal{X}(x_1, \dots, x_n)$ .

La section suivante introduira la notion de "champ dépendant du temps", c'est pourquoi l'on dira aussi qu'un champ de vecteurs au sens précédent est un "champ indépendant du temps" ou "autonome".

Précisons maintenant la terminologie.

**Définition 15.1**  $\Omega$  est un ouvert (non vide) d'un espace affine  $E$  de dimension  $d > 0$ ,  $\mathcal{X}$  est un champ de vecteurs continu sur  $\Omega$ .

On s'intéresse à l'ensemble des couples  $(J, \varphi)$  où  $J$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $\varphi \in C^1(J, E)$  une fonction vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \varphi(J) \subset \Omega \\ \varphi'(t) = \mathcal{X}(\varphi(t)) \quad \forall t \in J \end{cases}$$

Un couple  $(J, \varphi)$  vérifiant les conditions énoncées est un arc paramétré tracé sur  $\Omega$ , appelé une **trajectoire** du champ  $\mathcal{X}$ , ou **solution de l'équation différentielle autonome** du

**premier ordre**

$$m' = \mathcal{X}(m).$$

L'équation est dite **scalaire** si  $d = 1$ , **vectorielle** si  $d > 1$ .

Un couple  $(t_0, m_0) \in \mathbb{R} \times U$  est une **donnée de Cauchy** pour l'équation différentielle  $m' = \mathcal{X}(m)$ .

Une solution  $(J, \varphi)$  de cette équation **satisfait** la donnée de Cauchy  $(t_0, m_0)$  si  $t_0 \in J$  et  $\varphi(t_0) = m_0$ .

Un **problème de Cauchy** est la recherche d'une solution qui satisfait une donnée de Cauchy.

Le support  $\varphi(J)$  d'une trajectoire est l'**orbite** de cette trajectoire et une famille d'orbites est un **portrait de phases** de  $\mathcal{X}$ .

Dans  $\mathbb{R} \times U$ , l'arc paramétré par  $t \mapsto (t, \varphi(t))$  sur  $J$  est une **courbe intégrale** du champ  $\mathcal{X}$ .

**Définition 15.2** Un point  $a \in \Omega$  est un **point critique** de  $\mathcal{X}$  si  $\mathcal{X}(a) = 0$ . La trajectoire constante  $(\mathbb{R}, \varphi(t) = a)$  est un **équilibre**. L'orbite d'un équilibre est donc réduite au point critique.

Il est clair que toute orbite réduite à un point est l'orbite d'un équilibre.

**Définition 15.3** Pour un champ autonome  $\mathcal{X}$ ,  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$ , une **intégrale première** est une fonction  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  et constante sur chaque trajectoire de  $\mathcal{X}$  (cette constante dépend a priori de la trajectoire).

C'est le cas si  $d_x h(\mathcal{X}(x)) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

S'il existe une intégrale première  $h$ , toute orbite est donc contenue dans un ensemble de niveau de  $h$ . Plus précisément, l'orbite d'un point  $m_0$  est contenue dans l'ensemble  $h^{-1}(e)$ ,  $e = h(m_0)$ .

**Exemple 15.1** Avec  $E = \Omega = \mathbb{R}$ , et  $\mathcal{X}(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ ,  $(\mathbb{R}, 0)$  et  $(\mathbb{R}, t^3)$  sont des solutions du problème de Cauchy  $x(0) = 0$ .

Les trajectoires sont les projections sur l'axe des ordonnées des courbes intégrales  $(t, 0)$  et  $(t, t^3)$ .

Les orbites de ces trajectoires sont respectivement un point et la droite réelle.

**Exemple 15.2** Avec  $E = \Omega = \mathbb{R}$ , et  $\mathcal{X}(x) = 2\sqrt{|x|}$ . Pour  $a$  réel positif, les arcs  $(\mathbb{R}, \varphi_a)$

avec  $\varphi_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ (t - a)^2 & \text{si } t \geq a \end{cases}$  sont des solutions du problème de Cauchy  $x(0) = 0$ .

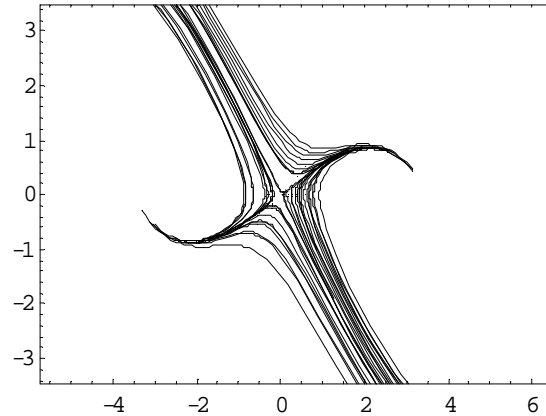
Distinguer les courbes intégrales, trajectoires, et orbites.

**Exemple 15.3** Avec  $E = U = \mathbb{R}$ , et  $\mathcal{X}(x) = x^2$ , une solution du problème de Cauchy  $x(t_0) = x_0$  est  $\left( \left] -\infty, \frac{1}{x_0} \right[ , \varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \right)$  si  $x_0 > 0$ , et  $\left( \left] \frac{1}{x_0}, +\infty \right[ , \varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \right)$  si  $x_0 < 0$ .

**Exemple 15.4** Avec  $E = \Omega = \mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{X}(x, y) = (y, \sin x - y)$ , ce qui correspond à l'équation

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \sin x - y \end{cases},$$

Un portrait de phases représenté ci-dessous est obtenu par un moyen logiciel, avec un choix aléatoire de données de Cauchy.



**Remarque 15.1** Le paramètre  $t$  d'une trajectoire est fréquemment appelé le "**temps**". Ceci est très abusif comme nous l'avons vu au chapitre 13.

**Proposition 15.1** (Invariance d'une orbite par translation du "temps").

Si  $(J, \varphi)$  est une solution du problème de Cauchy  $(x' = \mathcal{X}(x), x(t_0) = x_0)$ , et  $\tau \in \mathbb{R}$ , notons  $J_t = \{t - \tau, t \in J\} = J - \{\tau\}$  l'intervalle translaté, et  $\varphi_\tau : J_\tau \rightarrow E$  l'arc défini par  $\varphi_\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ . Alors  $(J_\tau, \varphi_\tau)$  est une trajectoire du même champ, vérifiant  $\varphi_\tau(t_0 - \tau) = x_0$ , donc une solution du problème de Cauchy  $(x' = \mathcal{X}(x), x(t_0 - \tau) = x_0)$ .

Les orbites  $\varphi(J)$  et  $\varphi_\tau(J_\tau)$  sont égales.

En effet,  $\varphi'_\tau(t) = \varphi'(t + \tau) = \mathcal{X}(\varphi(t + \tau)) = \mathcal{X}(\varphi_\tau(t))$ .

En prenant  $\tau = t_0$ , il apparaît que l'on peut exprimer tout problème de Cauchy relatif à un champ autonome en choisissant  $t_0 = 0$ .

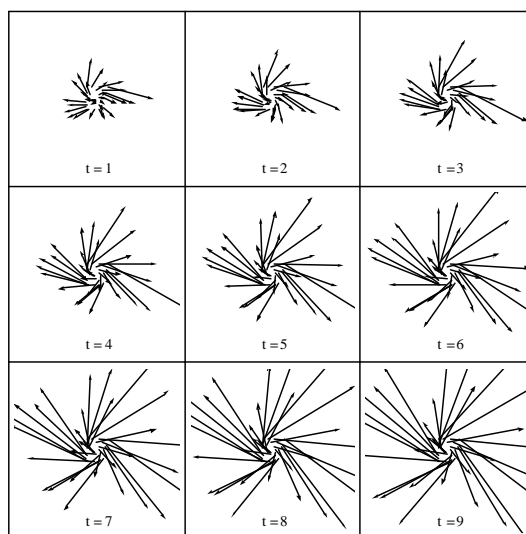
## 15.1.2 Champs de vecteurs non autonomes

### 15.1.2.1 Situations/Modèles

Commençons par quelques exemples abstraits.

Prenons  $\mathcal{X}(t, (x, y)) = (2x + ty + y^2, -tx + y - xy)$ . Pour chaque valeur de  $t$ , il s'agit d'un champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^2$ . La figure ci-dessous représente quelques vecteurs du champ, en des points choisis indépendamment de  $t$ , pour les valeurs indiquées de  $t$ .

$\mathcal{X}$  est défini sur  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .



Envisageons maintenant le cas de  $\mathcal{X}(t, x) = \frac{1}{x^2 - t^2}$ . Pour chaque valeur de  $t \in \mathbb{R}$ , il s'agit d'un champ scalaire défini sur un ouvert  $\Omega_t$  caractérisé par  $x^2 \neq t^2$  (réunion de trois intervalles ouverts).  $\mathcal{X}$  est défini sur l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  caractérisé par la relation  $x^2 - t^2 \neq 0$ .

De telles applications seront appelées des champs “non autonomes”. On dit aussi “champ dépendant du temps”, mais nous avons vu au chapitre précédent qu'il était très abusif d'employer le terme de temps à propos de n'importe quel paramètre réel.

De plus, si l'on prolonge la notion de trajectoire envisagée précédemment, pour s'intéresser aux arcs  $t \mapsto \varphi(t)$  tels que  $\varphi'(t) = \mathcal{X}(t, \varphi(t))$ , il convient de souligner une hypothèse implicite : le paramètre d'évolution de la trajectoire  $\varphi$  est confondu avec la variable temporelle du champ  $\mathcal{X}$ .

Pour de tels champs, des situations concrètes montrent qu'il est utile d'envisager deux types d'ensemble de définition.

Prenons un ballon qui se déforme, lors du gonflage par exemple. La vitesse dans l'espace de chaque particule de l'enveloppe est une fonction définie sur une partie  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , qui associe à chaque instant  $t$ , en chaque point  $m$  de l'enveloppe du ballon, le vecteur vitesse de la particule placée en  $m$  à l'instant  $t$ . L'ensemble des points  $m$  à chaque instant  $t$  est fonction de  $t$ ,  $U$  n'est donc pas le produit d'un intervalle réel par une partie de  $\mathbb{R}^3$ .

Par contre, si l'on étudie l'évolution d'un gaz dans une enceinte rigide et fixe dans l'espace,  $U$  est de la forme  $I \times \Omega$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

De plus, la différentiabilité d'une fonction définie sur  $U$  ne relève pas des chapitres antérieurs si  $U$  n'est pas une partie ouverte de  $\mathbb{R}^4$ , on limitera donc les situations en ajoutant cette hypothèse.

### 15.1.2.2 Vocabulaire

**Définition 15.4**  $E$  est un espace affine  $E$  de dimension  $d > 0$ ,  $\Omega$  un ouvert (non vide) de  $\mathbb{R} \times E$ , et  $\text{can} : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  la deuxième projection, et  $\text{can}_\Omega$  sa restriction à  $\Omega$ .

Un **champ de vecteurs** (ou de scalaires si  $d = 1$ ), continu, **non autonome** ou **dépendant du temps** sur  $\Omega$ , est une application  $\mathcal{X} \in C^1(\Omega, TE)$  telle que

$$\pi_E \circ \mathcal{X} = \text{can}_\Omega.$$

Autrement dit,  $\mathcal{X}$  est de la forme  $\mathcal{X}(t, m) = (m, h(t, m))$ .

En pratique, on confond  $h(t, m)$  et  $\mathcal{X}(t, m)$ , ce vecteur étant noté respectivement  $\mathcal{X}(t, x)$  ou  $\mathcal{X}(t, x, y)$  ou  $\mathcal{X}(t, x, y, z)$  dans les cas  $d = 1, 2, 3$ .

$$\begin{array}{ccc} & & TE \\ & \nearrow \mathcal{X} & \downarrow \pi_E \\ \Omega & \xrightarrow{\text{can}_\Omega} & E \end{array}$$

On s'intéresse à l'ensemble des couples  $(J, \varphi)$  où  $J$  est un intervalle **ouvert** de  $\mathbb{R}$ , et  $\varphi \in C^1(J, E)$  une fonction vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \{(t, \varphi(t)), t \in J\} \subset \Omega \\ \varphi'(t) = \mathcal{X}(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in J \end{cases}$$

Si  $\Omega = I \times U$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , borné ou non, et  $U$  un ouvert de  $E$ , la première condition impose l'inclusion  $J \subset I$ .

**Définition 15.5** Un couple  $(J, \varphi)$  vérifiant les conditions énoncées est un arc paramétré de  $E$  appelé une **trajectoire** du champ  $f$ , ou **solution de l'équation différentielle du premier ordre**

$$m' = \mathcal{X}(t, m).$$

L'équation est dite **scalaire** si  $d = 1$ , **vectorielle** si  $d > 1$ .

Dans  $\mathbb{R} \times E$ , l'arc paramétré par  $t \mapsto (t, \varphi(t))$  sur  $J$  est **courbe intégrale** du champ  $\mathcal{X}$ , et le support  $\varphi(J)$  d'une trajectoire est l'**orbite** de cette trajectoire.

Un couple  $(t_0, m_0) \in U$  est une **donnée de Cauchy** pour l'équation différentielle  $m' = \mathcal{X}(t, m)$ .

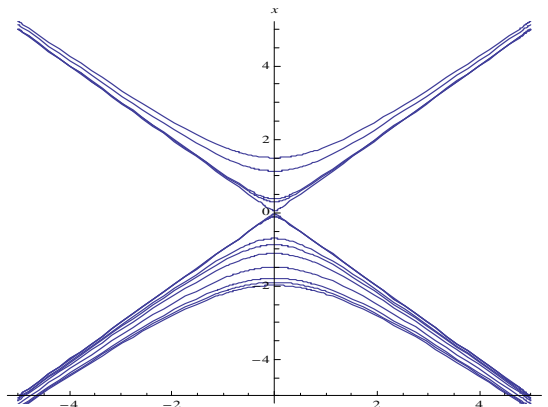
Une solution  $(I, \varphi)$  de cette équation **satisfait** la donnée de Cauchy  $(t_0, m_0)$  si  $t_0 \in I$  et  $\varphi(t_0) = m_0$ .

Un **problème de Cauchy** est la recherche d'une solution qui satisfait une donnée de Cauchy. On notera  $(m' = \mathcal{X}(t, m), m(t_0) = m_0)$  un problème de Cauchy.

Une trajectoire  $(I, \varphi)$  est **simple** si l'application  $\varphi$  est injective sur  $I$ , elle est **périodique** si  $I = \mathbb{R}$  et si l'application  $\varphi$  est périodique de période non nulle.

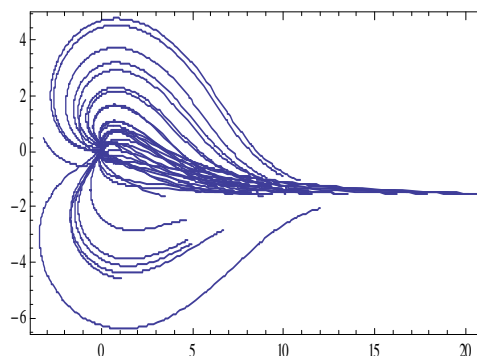
**Exemple 15.5**  $n = 1$ ,  $\mathcal{X}(t, x) = \frac{t}{x}$ .  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , pour tout réel non nul  $c$ ,  $(\mathbb{R}, \sqrt{c + t^2})$  et  $(\mathbb{R}, -\sqrt{c + t^2})$  sont des solutions de l'équation  $x' = \frac{t}{x}$ .

Représentations de 20 courbes intégrales avec  $\varphi(0)$  réel aléatoire compris entre  $-2$  et  $2$ ,  $t \in [-5, 5]$  est en abscisse. Repérer les trajectoires sur l'axe vertical.



**Exemple 15.6**  $n = 2$ ,  $\mathcal{X}(t, x, y) = (2x + ty + y^2, -tx + y - xy)$ ,  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .

Tracé de 50 trajectoires avec  $\varphi(0)$  vecteur aléatoire, de coordonnées comprises entre  $-1$  et  $1$ ,  $t \in [-3, 3]$ .



**Définition 15.6** Si  $U = I \times E$ , et si  $\mathcal{X}$  est de la forme

$$\mathcal{X}(t, m) = L(t)(\overrightarrow{om}) + g(t)$$

avec  $L(t) \in L(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $t \in I$ , l'équation différentielle est dite **linéaire** et est appelée équation (linéaire) **homogène** associée.

Une équation linéaire est dite à **coefficients constants** si  $L$  ne dépend pas de  $t$ .

### 15.1.2.3 Autres situations

Pour ne développer qu'une seule théorie, sauf cas très particuliers les équations de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

$f$  étant une fonction continue donnée, dites scalaires d'**ordre**  $n > 1$  seront toujours ramenées à des équations vectorielles d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^n$ , en les regardant sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= x, x_2 = x', \dots, x_{n-1} = x^{(n-2)}, x_n = x^{(n-1)} \\ (x_1, \dots, x_n)' &= \left( x', x'', \dots, x^{(n-1)}, f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \right), \end{aligned}$$

autrement dit, par une équation vectorielle de la forme  $X' = \mathcal{X}(t, X)$ .

Pour disposer de théorèmes "déterministes" d'existence et d'unicité des solutions, en un sens à préciser, on n'envisagera que des équations "**résolues** en  $x'$ " si elles sont du premier ordre, et "**résolues** en  $x^{(n)}$ " si elles sont d'ordre  $n$ . On entend par là que l'on n'étudiera pas une équation scalaire de la forme  $t^2x' + x + x^2 = 0$ , ni  $x'^3 + x^3 - 3xx' = 0$ , ni  $x'x'' + \cos x = 0$ .<sup>163</sup>

Il convient de veiller à ne pas remplacer une équation par une équation non équivalente. Ainsi, la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation  $x' = x^2$ , et non de l'équation  $\frac{x'}{x^2} = 1$ .

Pour les équations scalaires d'ordre deux, le plan dans lequel on regarde l'évolution de la fonction

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), x'(t))$$

est appelé le **plan des phases**.

Par exemple, l'équation scalaire d'ordre 2 :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$  peut être remplacé par l'équation vectorielle d'ordre 1 équivalente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

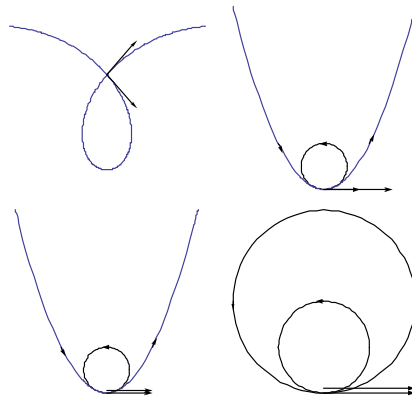
### 15.1.3 Premières questions

Les situations précédentes mettent en évidence plusieurs questions, que le champ soit autonome ou non.

Une première question concerne l'existence d'une solution pour un problème de Cauchy donné.

La section suivante donne des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi, dans des situations de généralité croissante.

Une deuxième question concerne la trajectoire d'une telle solution. Les arcs de  $\mathbb{R}^2$  représentés ci-dessous sont-ils des trajectoires possibles ?



- Si un arc tel que (1) ou (2) est la trajectoire  $\varphi$  d'un champ autonome  $f$ , on a  $t_1 < t_2$  avec  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ , donc

$$\varphi'(t_1) = f(\varphi(t_1)) = f(\varphi(t_2)) = \varphi'(t_2),$$

ce qui contredit les données de ces figures concernant les vecteurs tangents (l'on voit qu'un contact d'ordre 1 n'est pas suffisant).

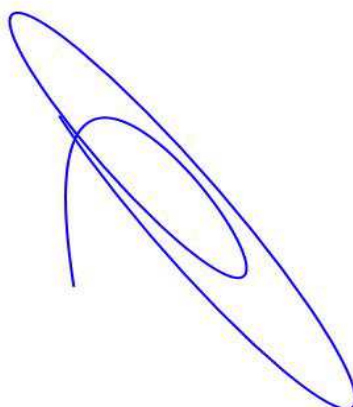
- Mais il y a plus, les situations des figures (3) et (4) seront considérées comme contraires aux conclusions du théorème de Cauchy-Lipschitz (§ 14- ).

<sup>163</sup> Voir le § 14-2-1 pour quelques exemples particuliers.



- Par contre, (1) ou (2) sont possibles avec un champ non autonome, puisque les conditions  $t_1 < t_2$  avec  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  n'apportent pas de contraintes pour les vecteurs  $\varphi'(t_1) = f(t_1, \varphi(t_1))$  et  $\varphi'(t_2) = f(t_2, \varphi(t_2))$ .

C'est le cas pour la courbe représentée ci-dessous, trajectoire du champ  $\mathcal{X}(t, (x, y)) = (x + y + \cos t, -4x - 3y + 1)$  passant par l'origine à  $t = 0$ .



Une troisième question est relative à l'*unicité*. Le fait qu'une solution soit la donnée d'un couple (intervalle, fonction) montre la nécessité de préciser ce que l'on cherche. Pour un champ scalaire tel que  $\mathcal{X}(x) = x$ , le problème de Cauchy  $x(0) = 0$  admet pour solutions tous les couples de la forme  $(J, 0)$  c'est à dire la fonction nulle sur un intervalle ouvert  $J$ . Par contre, pour le même problème de Cauchy et le champ  $\mathcal{Y}(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ , on a tous les couples de la forme  $(J, 0)$  et  $(J, t^3)$ . On peut aussi prendre la solution dont les restrictions à  $]-\infty, 0]$  et  $[0, +\infty[$  sont respectivement 0 et  $t^3$ .

Une quatrième question est concerne le concept de *solution maximale*. Ceci suppose la donnée préalable d'un champ  $\mathcal{X}(t, m)$ , d'un ensemble  $\mathcal{E}$  de solutions, et d'une relation d'ordre  $\preceq$  sur  $\mathcal{E}$ .

Rappelons (§ 1-), qu'un élément  $M \in \mathcal{E}$  est maximal si  $x \preceq M$  pour tout élément  $x \in \mathcal{E}$  qui est comparable à  $M$ , qu'un plus grand élément de  $\mathcal{E}$  est un élément maximal qui est comparable à tous les éléments de  $\mathcal{E}$ , et qu'un plus grand élément est unique à la fois en tant que plus grand élément et comme élément maximal.

Trois points de vue sont habituellement adoptés, plus ou moins explicitement distingués. Les champs  $\mathcal{X}$  envisagés sont continus.

#### 1- Les prolongements.

**Définition 15.7** Avec les données de la définition -, si  $(J_0, \varphi_0)$  et  $(J_1, \varphi_1)$  sont deux solutions d'une équation différentielle  $m' = \mathcal{X}(t, m)$ , on dit que  $(J_1, \varphi_1)$  **prolonge**  $(J_0, \varphi_0)$  ou que  $(J_0, \varphi_0)$  est une **restriction** de  $(J_1, \varphi_1)$  si  $J_0 \subset J_1$  et si la restriction de  $\varphi_1$  à  $J_0$  est  $\varphi_0$ .

En général, deux solutions, définies sur des intervalles ouverts  $J_1, J_2$  ne sont pas nécessairement comparables par restriction/prolongement, il suffit que  $J_1$  et  $J_2$  ne soient pas liés par une relation d'inclusion.

Pour le champ  $\mathcal{Y}$  ci-dessus, une relation d'inclusion telle que  $J_1 \subset J_2$  n'entraîne pas que la solution sur  $J_2$  prolonge la solution sur  $J_1$ .

La relation  $(J_0, \varphi_0) \preceq (J_1, \varphi_1)$  si  $J_0 \subset J_1$ , et  $\varphi_1$  prolonge  $\varphi_0$  est une relation d'ordre.

2- On restreint cette relation d'ordre à l'ensemble des prolongements d'une solution donnée d'un problème de Cauchy.

**Proposition 15.2** Dans l'ensemble  $\mathcal{E}_\varphi$  des prolongements d'une solution  $(I, \varphi)$  d'un problème de Cauchy  $(m' = \mathcal{X}(t, m), m(t_0) = m_0)$ , la relation  $(J_1, \varphi_1) \preceq (J_2, \varphi_2)$  si  $J_1 \subset J_2$ , et  $\varphi_2$  prolonge  $\varphi_1$  est une relation d'ordre inductive, donc  $\mathcal{E}_\varphi$  possède un élément maximal (c.a.d. qui appartient  $\mathcal{E}_\varphi$  et n'admet pas de prolongement strict dans  $\mathcal{E}_\varphi$ ).

**Définition 15.8** Un élément maximal de  $\mathcal{E}_\varphi$  est un **prolongement maximal** de la solution  $(I, \varphi)$  (ou **solution maximale**) du problème de Cauchy.

Démonstration

L'ensemble  $\mathcal{E}_\varphi$  est inductif pour la relation de prolongement.

En effet, notons  $(I_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  une chaîne (famille totalement ordonnée) d'éléments de  $\mathcal{E}_\varphi$ .

La réunion  $\tilde{I} = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}$ , c'est donc un intervalle ouvert, et posons

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_\alpha(t) \text{ si } t \in I_\alpha.$$

Cette relation définit effectivement une application car, si  $t \in I_\alpha \cap I_\beta$ , l'une des solutions  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  prolonge l'autre donc  $\varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(t)$ , et l'on voit facilement que  $\tilde{\varphi}$  est une solution du problème de Cauchy qui prolonge toutes les solutions  $(I_\alpha, \varphi_\alpha)$ , donc aussi  $(I, \varphi)$ .

Il résulte du Lemme de Zorn (Prop. 1-) que l'ensemble  $\mathcal{E}_\varphi$  possède un élément maximal. ■

3- La définition de l'ordre précédent peut être assouplie. L'ensemble envisagé est alors l'ensemble  $\mathcal{E}$  des solutions du problème de Cauchy  $(m' = \mathcal{X}(t, m), m(t_0) = m_0)$ , ordonné par la relation  $(J_1, \varphi_1) \preceq (J_2, \varphi_2)$  si  $J_1 \subset J_2$ . Dans des conditions d'unicité locale telles que celles du théorème de Cauchy-Lipschitz, comme nous le verrons au § 14-,  $\varphi_2$  sera nécessairement un prolongement de  $\varphi_1$ , et l'existence d'un élément maximal de  $\mathcal{E}$  sera obtenue sans utiliser le Lemme de Zorn.

## 15.2 Résolution d'un problème de Cauchy

La question est traitée en commençant par quelques cas très particuliers suivis d'extensions progressives.

### 15.2.1 Résolution d'une équation linéaire scalaire d'ordre un

Il s'agit des équations  $x' = a(t)x + b(t)$ , où  $a$  et  $b$  sont des fonctions réelles continues sur un intervalle ouvert  $I$ . On s'intéresse à priori aux solutions définies sur  $I$  entier.

Commençons par le cas homogène ( $b = 0$ ), et notons  $A$  une primitive de  $a$ .

L'idée est de remplacer  $x' = a(t)x$  par  $\frac{x'}{x} = a(t)$ , pour égaliser les primitives; mais en déduire  $\log \frac{x'}{x} = A(t) + cte$  est sans fondement (dresser une liste des propriétés que l'on impose à priori à une solution  $x(t)$  pour une telle déduction). Cela peut seulement jouer un rôle mnémotechnique (que l'on ne peut négliger !) et rendre naturelle la démarche suivante.

Un calcul immédiat prouve en effet qu'une fonction  $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$  est une solution de l'équation  $x' = a(t)x$  si et seulement si la fonction  $e^{-A(t)}x(t)$  est solution de l'équation  $x' = 0$ .

On a donc obtenu le résultat suivant :

**Proposition 15.3** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $a \in C^1(I, \mathbb{R})$ . L'ensemble des solutions définies sur  $I$  de l'équation  $x' = a(t)x$ , autrement-dit l'ensemble des trajectoires sur la droite réelle du champ de vecteurs  $f(t, x) = a(t)x$ ,  $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$ , est un espace vectoriel  $\vec{S}$  de dimension 1, engendré par la fonction  $t \mapsto e^{A(t)}$ ,  $t \in I$ , où  $A$  est une primitive quelconque de  $a$ . Ce sont les fonctions de la forme  $k e^{A(t)}$ ,  $t \in I$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Toute solution  $(J, \varphi)$  définie sur un intervalle ouvert  $J \subset I$  est une restriction à  $J$  d'une solution sur  $I$ .

Notons  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation  $x' = a(t)x + b(t)$ , définies sur  $I$ . Il est clair que la différence de deux éléments de  $S$  appartient à  $\vec{S}$ , ce qui donne à  $S$  une structure de droite affine dirigée par  $\vec{S}$  à condition que  $S$  ne soit pas vide.

On est ramené au calcul d'une solution particulière de l'équation  $x' = a(t)x + b(t)$ .

Il ne faut jamais négliger la possibilité d'obtenir une telle solution sans calcul, par l'observation ou à partir de l'origine physique de l'équation. Par exemple,  $x' + x = \sin t + \cos t$  admet une solution particulière évidente.

Enfin, une méthode due à **Lagrange**, appelée **variation de la constante**, consiste à rechercher une solution a priori sous la forme  $\varphi(t) = k(t) e^{A(t)}$ , où  $k \in C^1(I, \mathbb{R})$ .

La fonction  $\varphi$  doit vérifier la relation  $\varphi'(t) = a(t)k(t) e^{A(t)} + b(t)$ , soit

$$k'(t) e^{A(t)} + a(t)k(t) e^{A(t)} = a(t)k(t) e^{A(t)} + b(t),$$

donc

$$k'(t) = e^{-A(t)} b(t).$$

Un choix d'une primitive de  $e^{-A(t)} b(t)$  achève la détermination de  $\varphi$ .

**Remarque 15.2** Le résultat sur la dimension de l'espace des solutions sur  $I$  est **faux** si l'on oublie qu'une solution doit être définie sur un intervalle. Considérer par exemple, l'ensemble des solutions de l'équation  $x' = 0$  sur  $\mathbb{R}^*$  ou, moins trivialement, l'ensemble des solutions de l'équation  $x' = 2\frac{x}{t} + t^2$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Ce sont les fonctions dont les restrictions à  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$  sont respectivement de la forme  $x(t) = t^3 + at^2$ , et  $x(t) = t^3 + bt^2$ ,  $a$  et  $b$  étant des réels quelconques). Une telle fonction, prolongée par la valeur 0 à l'origine, définit évidemment une fonction  $\bar{x} \in C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , mais dire que  $\bar{x}$  est solution de  $x' = 2\frac{x}{t} + t^2$  sur  $\mathbb{R}$  n'a aucun sens. La fonction  $\bar{x}$  est par contre une solution de l'équation  $tx' = 2x + t^3$  sur  $\mathbb{R}$ , laquelle n'est pas une équation linéaire (le résultat sur la dimension de l'espace des solutions serait contredit).

D'autre part, l'utilité de supposer l'intervalle ouvert n'apparaîtra qu'au § 14-2-5 (remarque 14-6).

**Remarque 15.3** On adaptera facilement la proposition précédente au cas des fonctions à valeurs complexes.

**Exemple 15.7**  $x' = \frac{-2}{t}x + \frac{\cos t}{t}$ . Cette expression conduit à deux équations selon le choix de l'intervalle  $I$  sur lequel  $a(t) = \frac{-2}{t}$  et  $b(t) = \frac{\cos t}{t}$  sont continues.

L'espace affine des solutions sur  $I_1 = ]0, +\infty[$  est la droite  $D$  dont l'espace directeur  $\vec{D}$  est engendré par la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ,  $t \in ]0, +\infty[$ .

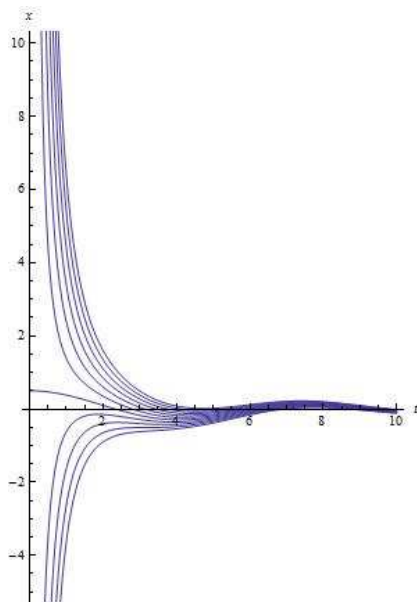
L'espace affine des solutions sur  $I_2 = ]-\infty, 0[$  est la droite  $\Delta$  dont l'espace directeur  $\vec{\Delta}$  est engendré par la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ,  $t \in ]-\infty, 0[$ .

La méthode de Lagrange, pour déterminer par exemple une solution particulière  $(I_1, \varphi)$ , de l'équation complète, donne  $k'(t) = t \cos t$ , et donc (i.p.p),  $k(t) = \cos t + t \sin t$ .

Finalement, les éléments de  $D$  s'écrivent  $\varphi_k(t) = \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t + k)$ , pour  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  se sont pas prolongeables par continuité à l'origine, rechercher une solution sur  $\mathbb{R}$  n'a donc pas de sens pour cette équation.

Par contre, il est intéressant d'observer le comportement de  $\varphi_k$  lorsque  $t$  tend vers 0 dans  $\mathbb{R}_+$ . Si  $k \neq -1$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_k(t) = +\infty$  ou  $-\infty$ , si  $k = -1$ , un d.l. de  $\cos$  et de  $\sin$  en 0 montre que la limite est  $\frac{1}{2}$ .



**Exemple 15.8** L'équation  $tx' + 2x = \cos t$ , qui n'est pas équivalente à la précédente, et qui ne relève pas de la définition 10-3 possède une solution (unique) sur  $\mathbb{R}$ . En effet, si  $\varphi$  est une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = \cos t$ , alors la restriction  $\varphi_1$  de  $\varphi$  à  $]-\infty, 0[$  est solution de l'équation précédente, donc de la forme  $\varphi_1(t) = \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t + k_1)$ , et la restriction  $\varphi_2$  de  $\varphi$  à  $]0, +\infty[$  est solution de l'équation précédente, donc de la forme  $\varphi_2(t) = \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t + k_2)$ .

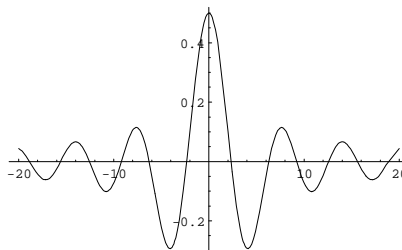
La fonction  $\varphi$  être continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en 0. Il est donc nécessaire que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t + k_1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t + k_2),$$

ce qui n'est possible que si  $k_1 = k_2 = -1$  comme on l'a vu précédemment, la limite commune étant  $\frac{1}{2}$ .

Inversement, la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = \frac{1}{t^2} (\cos t + t \sin t - 1)$  si  $t \neq 0$  et  $f(0) = \frac{1}{2}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et solution de  $tx' + 2x = \cos t$ , on constate en effet que le taux de variation de  $\varphi$  entre 0 et  $t \neq 0$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0,  $\varphi$  est donc dérivable en 0, avec  $\varphi'(0) = 0$ , enfin  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \varphi'(0)$ .

Représentation de l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de  $tx' + 2x = \cos t$  (courbe intégrale avec  $t$  en abscisse).

**Exercice**

Déterminer, selon l'intervalle choisi, l'espace affine  $S$  des solutions de l'équation

$$x' = \frac{t}{1-t^2}x + \frac{1}{1-t^2}.$$

*Réponse*

Si  $I = ]-1, 1[$ ,  $S$  est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x(t) = \frac{k + \text{Arc sin } t}{\sqrt{1-t^2}} \quad k \in \mathbb{R}$$

Si  $I = ]-\infty, 1[$  ou  $]1, +\infty[$ ,  $S$  est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x(t) = \frac{k - \log |t + \sqrt{t^2 - 1}|}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad k \in \mathbb{R}$$

**Exercice**

$f$  est une fonction  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) + f'(t) = 0$ . Que peut-on dire de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  ?

*Réponse*

Soit  $g = f + f'$ . Alors,  $f(t) = e^{-t} \left( f(0) + \int_0^t e^u g(u) du \right)$ , et une majoration facile conduit à  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

**15.2.2 Oscillateurs scalaires**

La terminologie évoque évidemment les origines mécaniques de ces équations, mais il n'y a aucune raison de se limiter à la mécanique. C'est pourquoi les équations traités dans cette section sont dégagés de toute origine physique pour donner une méthode neutre vis à vis des questions de modélisation.

**15.2.2.1 Oscillateur harmonique scalaire**

**Définition 15.9** *Un oscillateur harmonique scalaire est une équation scalaire du second ordre de la forme  $x'' + a x = 0$ , où  $a$  est un réel  $> 0$ .*

*Traditionnellement, on l'écrit  $x'' + \omega^2 x = 0$ .*

Une famille de solutions évidentes apparaît, il s'agit des fonctions de la forme

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, t \in \mathbb{R}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

On peut écrire  $\varphi(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $(C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ .

Le réel non nul  $\omega$  (que l'on peut choisir positif) est appelé la **pulsation** de  $\varphi$ .

L'ensemble  $\vec{S}$  des solutions réelles de l'équation  $x'' + \omega^2 x = 0$  ( $\omega$  étant fixé non nul) est clairement un espace vectoriel (réel), et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \vec{S} \\ (A, B) &\mapsto x \end{aligned}$$

est un morphisme. Il importe de souligner que  $A = x(0)$  et  $B = \frac{x'(0)}{\omega}$ .

En fait, ce morphisme est bijectif, ce qui permet d'affirmer que l'on a déterminé complètement  $\vec{S}$ , et que  $\dim \vec{S} = 2$ . Nous allons voir plusieurs démonstrations de cette propriété fondamentale.

Pour toute solution  $x$ , la fonction  $x'^2 + \omega^2 x^2$  est évidemment constante. On l'interprétera en termes d'énergie au chapitre 15. Cela signifie que, dans le plan des phases, les arcs  $(x(t), x'(t))$  associés aux solutions sont contenus dans les "courbes" d'équation  $y^2 + \omega^2 x^2 = cte$ .

### 15.2.2.2 Oscillateur amorti

Il s'agit des équations linéaires autonomes scalaires d'ordre deux, qui généralisent les oscillateurs harmoniques. Ce sont les équations de la forme

$$x'' + ax' + bx = 0 \quad a, b \text{ réels donnés} \tag{E}$$

$\vec{S}$  désignera l'espace vectoriel des solutions définies sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 15.10** *Un oscillateur harmonique scalaire amorti est une équation de la forme  $x'' + ax' + \omega^2 x = 0$ , avec  $a < 0$  et  $\omega \neq 0$ .*

Un procédé élémentaire de résolution d'une équation  $x'' + ax' + bx = 0$  s'obtient en remarquant ceci. Si l'équation admet une solution de la forme  $x(t) = e^{\lambda t}$ , avec  $\lambda$  réel, alors  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Il en est de même pour  $x(t) = \operatorname{Re} e^{\lambda t}$ , et  $\lambda$  complexe.

On associe donc à l'équation différentielle  $x'' + ax' + bx = 0$  l'équation algébrique  $X^2 + aX + b = 0$ , appelée **équation caractéristique** associée.

**Proposition 15.4** *a) Soient  $(\lambda_1, \lambda_2)$  les solutions (réelles ou complexes conjuguées) de l'équation caractéristique  $X^2 + aX + b = 0$ .*

*- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réels ( $a^2 - 4b > 0$ ), alors les fonctions  $e^{\lambda_1 t}$  et  $e^{\lambda_2 t}$  sont deux solutions indépendantes de (E).*

*- Si  $\lambda$  est une racine double ( $a^2 - 4b = 0$ ), alors les fonctions  $e^{\lambda t}$  et  $t e^{\lambda t}$  sont deux solutions indépendantes de (E).*

*- Si  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  sont complexes conjugués ( $a^2 - 4b < 0$ ), alors les fonctions  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  et  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  sont deux solutions indépendantes de (E). Les solutions (combinaisons linéaires) sont donc de la forme  $ce^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$ .*

*b) L'espace vectoriel  $\vec{S}$  des solutions réelles de (E) est de dimension 2, et pour tout réel  $t_0$ , l'application linéaire*

$$\begin{aligned} \vec{S} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x(t_0), x'(t_0)) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration**

La vérification de a) est immédiate.

La vérification de b) peut se faire en deux temps. Désignons par la même lettre  $x_1$  et  $x_2$  les solutions indépendantes dans chacun des cas distingués précédemment.

Dans un premier temps, prenons arbitrairement  $(t_0, x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^3$ . Il existe une solution (et une seule), de la forme  $x = Ax_1 + Bx_2$ , telle que  $x(t_0) = x_0$  et  $x'(t_0) = x'_0$ .

En effet, le couple  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  est solution du système linéaire

$$\begin{aligned} x_0 &= Ax_1(t_0) + Bx_2(t_0) \\ x'_0 &= Ax'_1(t_0) + Bx'_2(t_0). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que le déterminant de ce système est non nul dans chacun des cas décrit au a).

En imposant à  $x$  la forme  $x = Ax_1 + Bx_2$ , la question de l'unicité reste ouverte.

Dans un deuxième temps, il s'agit donc de prouver que toute solution  $y$  de (E) est égale à la solution  $x$  que l'on vient d'obtenir si l'on fait le choix  $x_0 = y(t_0)$  et  $x'_0 = y'(t_0)$ .

Pour cela, on remarque que la fonction  $z(t) = (x - y)(t + t_0)$  est une solution vérifiant  $z(0) = 0$  et  $z'(0) = 0$ .

D'autre part, y compris lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2$ , la fonction  $\psi = z' - \lambda_1 z$  vérifie la relation

$$\begin{aligned} \psi' - \lambda_2 \psi &= z'' - (\lambda_1 + \lambda_2)z' + \lambda_1 \lambda_2 z \\ &= z'' + az' + bz = 0, \end{aligned}$$

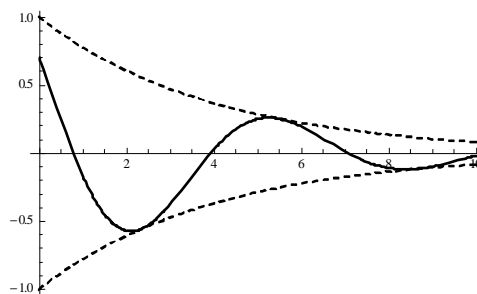
et  $\psi(0) = 0$ . Il en résulte que  $\psi = 0$ .

Des relations  $z' = \lambda_1 z$  et  $z(0) = 0$ , on déduit de même que  $z = 0$ . ■

**Remarque 15.4** Dans le cas  $a^2 - 4b < 0$ , les solutions  $\varphi(t) = ce^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$  sont tangentes aux courbes  $\pm\psi(t) = \pm ce^{\alpha t}$ , en des points pour lesquels  $\cos(\omega t + \phi) = \pm 1$ . Le contact est d'ordre 1 puisqu'en ces points,  $\varphi'(t) = \psi'(t)$ .

Ces points sont distincts des extréma de  $\varphi$ , mais dans les deux cas, les abscisses sont également réparties. C'est la raison pour laquelle  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est appelé la **pseudo-période** de l'oscillateur.

Pour  $a < 0$ , les maxima et  $\psi$  sont des fonctions décroissantes de  $t$ , l'oscillateur correspondant est un **amortissement faible**.

**15.2.2.3 Oscillateur amorti entraîné**

**Définition 15.11** Un oscillateur harmonique scalaire amorti entraîné est une équation de la forme  $x'' + ax' + \omega^2 x = f(t)$ , où  $f$  est une fonction scalaire continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $a < 0$ ,  $\omega \neq 0$ .

Le cas particulier usuel est le suivant : l'équation homogène est un oscillateur avec amortissement faible de pseudo-période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , et  $f$  (qui représente une force d'entraînement en mécanique) est de la forme  $f(t) = c \cos(\omega_e t + \phi_e)$ , avec  $c, \phi_e, \omega_e$  réels et  $\omega_e > 0$ .

Il suffit de déterminer une solution particulière  $\varphi_0(t)$  de cette équation. Un procédé commode est d'écrire  $\varphi_0(t) = \operatorname{Re} \tilde{\varphi}_0(t)$ , où  $\tilde{\varphi}_0$  est une solution de l'équation

$$x'' + ax' + \omega^2 x = c \exp i(\omega_e t + \phi_e),$$

et rechercher  $\tilde{\varphi}_0$  sous la forme  $k \exp i(\omega_e t + \phi_e)$ ,  $k \in \mathbb{C}$ .

En reportant, il vient

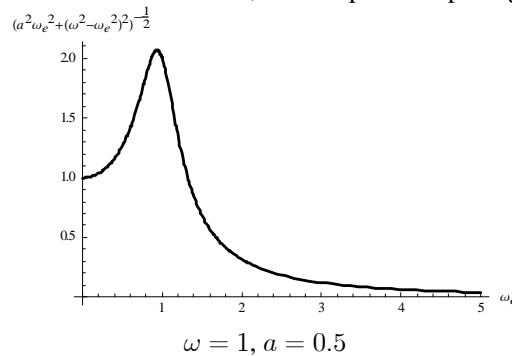
$$(\omega^2 - \omega_e^2 + ia\omega_e) \tilde{\varphi}_0(t) = c \exp i(\omega_e t + \phi_e).$$

$Z = \omega^2 - \omega_e^2 + ia\omega_e$  est l'**impédance** complexe de l'oscillateur, et l'on a, en posant

$$\cos \theta = \frac{\omega^2 - \omega_e^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + (a\omega_e)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{a\omega_e}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + (a\omega_e)^2}},$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \operatorname{Re}(Z^{-1} c \exp i(\omega_e t + \phi_e)) \\ &= \frac{c}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + (a\omega_e)^2}} \cos(\omega_e t + \phi_e - \theta). \end{aligned}$$

Les solutions sont donc de la forme  $\varphi(t) = ce^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) + \varphi_0(t)$ , et par conséquent, se comportent progressivement comme  $\varphi_0(t)$  lorsque  $t$  augmente. Cette solution  $\varphi_0(t)$  se distingue de l'oscillation libre par l'amplitude, dont le coefficient multiplicateur est maximum lorsque  $\omega_e = \omega$ , on parle alors de **résonance**, et aussi par un déphasage de  $\theta$ .



Plus généralement, pour un oscillateur  $x'' + ax' + \omega^2 x = f(t)$ , on recherche une solution particulière sous la forme  $\varphi_0(t) = c(t)e^{\alpha t} \sin \omega t$  (méthode de Lagrange), ce qui conduit à une équation linéaire en  $c'$ .

## 15.2.3 Equations linéaires autonomes, prolongements d'exponentielles (IV)

### 15.2.3.1 Problème de Cauchy linéaire

$E$  est un espace affine de dimension  $d$ ,  $\vec{E}$  est l'espace directeur,  $o \in E$  est un point origine fixé.

Il s'agit des champs sur  $E$  de la forme  $\mathcal{X}(t, m) = L(\vec{om})$ , où  $L \in L(\vec{E})$ , autrement dit des équations de la forme

$$\frac{dm}{dt} = L(\vec{om}) \quad (2)$$

dites autonomes ou à **coefficients constants**.



Relativement à une base  $\mathcal{B}$  de  $\vec{E}$ , la traduction matricielle de l'équation  $m' = L(\vec{om})$  est

$$\frac{dm_{\mathcal{B}}}{dt} = L_{\mathcal{B}} m_{\mathcal{B}} \quad (3)$$

où  $m_{\mathcal{B}}$  et  $L_{\mathcal{B}}$  sont des matrices de taille  $d \times 1$  et  $d \times d$  respectivement.

Si l'équation est donnée sous la forme (2), elle admet une expression matricielle (3) dépendant du choix de la base. En pratique, l'équation est donnée sous la forme (3), et l'on va rechercher des changements de base intéressants. Il est habituel de passer d'une formulation (3) à une autre à l'aide de la matrice de changement de base. Notons  $P$  la matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$ , sachant que  $m_{\mathcal{B}} = P m_{\mathcal{B}'}$  et  $L_{\mathcal{B}'} = P^{-1} L_{\mathcal{B}} P$ , la relation (3) est équivalente à  $\frac{dm_{\mathcal{B}'}}{dt} = L_{\mathcal{B}'} m_{\mathcal{B}'}$ , mais ceci n'est qu'une traduction de la formulation intrinsèque (2), qu'il importe de ne pas oublier.<sup>164</sup>

La proposition qui suit donne quelques indications sur ce que l'on entend par bases de  $\mathbb{R}^d$  "intéressantes".

**Proposition 15.5** 1) Les solutions maximales de l'équation  $\frac{dm}{dt} = L(\vec{om})$ ,  $L \in L(\vec{E})$ , sont définies sur  $\mathbb{R}$ , leur ensemble  $\vec{S}$  est un espace vectoriel de dimension (réelle)  $d$ .

2) Si  $\lambda$  est une valeur propre (réelle) de  $A$ , et  $v_0$  un vecteur propre associé, la fonction  $t \rightarrow e^{\lambda t} v_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est une solution de (2) dont la trajectoire est une demi-droite. C'est donc la solution du problème de Cauchy ( $m' = L(\vec{om})$ ,  $\vec{om}(0) = v_0$ ).

3) S'il existe une décomposition non triviale  $\vec{E} = F_1 \oplus F_2$  de l'espace en somme directe de deux sous-espaces stables par  $L$ , et si l'on note  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  les espaces des solutions respectives des équations  $\frac{dm}{dt} = L_i(\vec{om})$ ,  $L_i \in L(F_i)$  étant la restriction de  $L$  à  $F_i$ , alors  $\vec{S} = \vec{S}_1 \oplus \vec{S}_2$ .

1) est le seul point non évident, la démonstration est reportée à la section suivante pour le cas particulier  $d = 2$ , et à la proposition 14- pour le cas général.

### 15.2.3.2 Cas particulier $n = 2$

Prenons  $E = \mathbb{R}^2$ .

Les équations (E)  $x'' + ax' + bx = 0$  du §14- s'écrivent

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

On va donc retrouver les solutions données comme cas particuliers de la résolution des équations

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \text{ avec } A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}).$$

Déterminer  $\vec{S}$  revient donc à connaître deux solutions indépendantes. Les cas suivants représentent tous les cas possibles.

a)  $L$  est **diagonalisable**.

Premier cas :  $L$  ne possède qu'une valeur propre (homothétie de rapport  $\lambda$ ),  $(e, \varepsilon)$  étant une base quelconque de  $\mathbb{R}^2$ , les fonctions  $\varphi_1(t) = e^{\lambda t} e$  et  $\varphi_2(t) = e^{\lambda t} \varepsilon$  forment une base de  $\vec{S}$ , avec  $I = \mathbb{R}$ ,

Les solutions maximales de  $\frac{dm}{dt} = L(\vec{om})$  sont ainsi les fonctions de la forme

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} (c_1 e + c_2 \varepsilon), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,$$

les trajectoires sont des demi-droites.

<sup>164</sup> La presse titre régulièrement sur le rapprochement du fonctionnement des ordinateurs de celui des humains, cet exemple illustre le rapprochement en sens inverse.

Deuxième cas :  $L$  possède deux valeurs propres distinctes  $\lambda, \mu$ , et  $(e, \varepsilon)$  étant une base de vecteurs propres associés, les fonctions  $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}e$  et  $\varphi_2(t) = e^{\mu t}\varepsilon$  forment une base de  $S$ .

Les solutions maximales de  $\frac{dm}{dt} = L(\overline{om})$  sont alors les fonctions de la forme

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} e + c_2 e^{\mu t} \varepsilon, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

L'allure des trajectoires dépend du signe des valeurs propres. Trois cas se présentent, illustrés par les exemples suivants.

**Exemple 15.9** Vérifier les calculs suivants.

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x + y \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \quad V_1 = (-1, 1), \quad V_2 = (1, 1)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 + C_2 e^{2t} \\ y(t) &= C_1 + C_2 e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= 3x + 2y \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \quad V_1 = (1, -3), \quad V_2 = (0, 1)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t \\ y(t) &= C_2 e^{2t} - 3C_1 e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= -4x - 3y \\ y' &= 2x + 3y \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \quad V_1 = (1, -2), \quad V_2 = (-3, 1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} \\ x(t) &= C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{aligned}$$

b) Si  $A$  possède **deux valeurs propres complexes conjuguées**  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  avec  $\beta \neq 0$ , on note  $Z$  un vecteur propre associé à l'une d'elles, ce vecteur de  $C^2$  s'écrit  $Z = U + iV$ , avec  $U \in \mathbb{R}^2$  et  $V \in \mathbb{R}^2$ .

On se limitera ici à constater que, les vecteurs  $U$  et  $V$  sont indépendants, et que les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha t} ((\sin \beta t) U + (\cos \beta t) V) \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} ((\cos \beta t) U - (\sin \beta t) V) \end{aligned}$$

forment une base de solutions maximales de l'équation  $X' = L(X)$ .

Démonstration

D'une part, la relation

$$L(Z) = L(U) + iL(V) = (\alpha + i\beta)(U + iV)$$

donne  $L(U) = \alpha U - \beta V$  et  $L(V) = \beta U + \alpha V$ . Si  $U = 0$ , alors  $V = 0$ , de même  $V = 0$  donne  $U = 0$ , les vecteurs  $U$  et  $V$  sont donc non nuls.

D'autre part,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des solutions. Vérifions-le par exemple pour  $\varphi_1$ .

$$\begin{aligned} L(\varphi_1(t)) &= e^{\alpha t} ((\sin \beta t) L(U) + (\cos \beta t) L(V)) \\ &= e^{\alpha t} ((\sin \beta t) (\alpha U - \beta V) + (\cos \beta t) (\beta U + \alpha V)) \\ &= \alpha e^{\alpha t} ((\sin \beta t) U + (\cos \beta t) V) + \beta e^{\alpha t} ((\cos \beta t) U - (\sin \beta t) V) \\ &= \varphi_1'(t). \end{aligned}$$

Si  $U = kV$ , avec  $k$  réel, il vient

$$\begin{aligned} L(U) &= (k\alpha - \beta)V \\ &= kL(V) \\ &= (\beta k^2 + \alpha k)V, \end{aligned}$$

et par suite,  $k^2 = -1$ , ce qui est exclu.

Enfin, une relation de dépendance entre les solutions s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) = 0,$$

avec  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{2}$ , on voit que  $a = b = 0$ .

Les solutions maximales de  $\mathcal{X}' = L(\mathcal{X})$  sont ainsi les fonctions de la forme

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}W(t), \text{ avec}$$

$$W(t) = (c_1((\sin \beta t)U + (\cos \beta t)V) + c_2((\cos \beta t)U - (\sin \beta t)V), (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

En prenant le produit scalaire de  $\mathbb{R}^2$  pour lequel la base  $(U, V)$  est orthonormale, on explique l'allure de spirale des trajectoires.

**Exemple 15.10** L'oscillateur harmonique scalaire  $x'' + \omega^2 x = 0$  correspond au choix de

$$\text{la matrice } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avec la méthode précédente, on peut choisir  $\lambda = i\omega$ ,  $Z = (1, i\omega) = U + iV$  avec  $U = (1, 0)$  et  $V = \omega(0, 1)$ , ce qui donne la base de solutions réelles  $\varphi_1(t) = (\sin \omega t, \omega \cos \omega t)$ ,  $\varphi_2(t) = (\cos \omega t, -\omega \sin \omega t)$ .

Les solutions sont de la forme  $(x(t), y(t)) = A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)$ .

On retrouve ainsi l'expression (1) pour  $x(t)$ , et  $y(t) = x'(t)$ .

**Exemple 15.11** Vérifier les calculs suivants.

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + y \end{aligned}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 1 \pm i, u = (1, 0), v = (0, 1)$$

$$x(t) = C_2 e^t \sin t - C_1 e^t \cos t$$

$$y(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t$$

Dans le cas particulier où les valeurs propres de  $A$  sont imaginaires ( $\alpha = 0$ ), les trajectoires sont des ellipses.

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= -x - y \end{aligned}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \lambda = \pm i. \lambda = i \text{ par exemple donne} \\ Z &= (2, i - 1) = u + iv \text{ avec } u = (2, -1), v = (0, 1).$$

c) Si  $A$  possède une **valeur propre double**  $\lambda$ , supposons que  $A$  ne soit pas une homothétie. Cela signifie que le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est une droite, notons  $V$  un vecteur propre. On choisit arbitrairement un vecteur  $W$  non colinéaire à  $V$ , et on vérifie que les fonctions suivantes

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}V$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(I + t(L - \lambda I))(W)$$

forment une base de solutions.

**Démonstration**

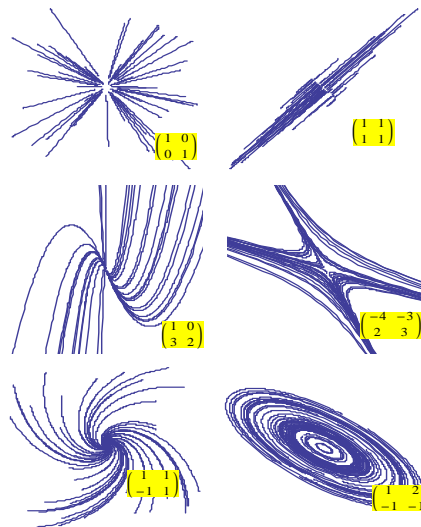
$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} (I + t(L - \lambda I)) (W)$   
 donc  $\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = e^{t\lambda} L(W) + t\lambda e^{t\lambda} L(W) - t\lambda^2 e^{t\lambda} W$ .  
 D'autre part,  $L(\varphi_2(t)) = e^{\lambda t} (L + t(L^2 - \lambda L)) (W)$   
 et  $(L - \lambda I)^2 = 0$  (Théorème de Cayley-Hamilton § 4-).  
 donc  $L(\varphi_2(t)) = e^{\lambda t} (L + t(\lambda L - \lambda^2 I)) (W)$ .

**Exemple 15.12**  $x' = x + y$ ,  $y' = -4x - 3y$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -1$ ,  $V = (1, -2)$ , par exemple  $W = (1, 0)$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}(1 + 2t) \\
 y(t) &= -2C_1 e^{-t} - 4tC_2 e^{-t}.
 \end{aligned}$$

**Exercice**

Justifier les portraits de phases suivants à partir du calcul des valeurs et vecteurs propres (certains des exemples ont été traités précédemment).



**15.2.3.3 Expression générale des solutions**

Dans les cas particuliers précédents, l'intervention des exponentielles d'endomorphismes (Cf. Chap. 12) n'est pas explicite. En dimension finie supérieure à 2, cet outil est systématique. En réalité, la propriété d'unicité a pour conséquence que, quel que soit le procédé de calcul utilisé, on calcule toujours une exponentielle d'endomorphisme, implicitement ou non !

**Proposition 15.6** Pour toute donnée de Cauchy  $(t_0, m_0) \in \mathbb{R} \times E$ , le problème de Cauchy  $\frac{dm}{dt} = L(\vec{om})$ ,  $m(t_0) = m_0$ , admet une solution unique définie sur  $\mathbb{R}$ , et donnée par

$$\vec{om}(t) = (\exp(t - t_0) L) (\vec{om}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} L^n (\vec{om}_0)$$

L'ensemble  $\vec{S}$  des solutions définie sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $\frac{dm}{dt} = L(\vec{om})$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ , et pour tout réel  $t_0$ , l'application

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{S} \\ v_0 &= \vec{om}_0 \mapsto (\exp(t - t_0)L)(v_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Il en résulte que les colonnes de la matrice de l'automorphisme  $\exp(t - t_0)L$  dans une base (quelconque) de  $\vec{E}$  fournissent une base de  $\vec{S}$ .

#### Démonstration

Prenons  $t_0 = 0$  pour simplifier l'écriture, et posons  $\varphi(t) = (\exp tL)(v_0)$ .

La relation  $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n(v_0)$  est connue (Prop. 12-), en particulier  $\varphi(0) = v_0$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n(v_0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} L^n(v_0) \text{ (Prop. 12-)} \\ &= (\exp tL)(L(v_0)) \\ &= \left( \frac{d}{dt} (\exp tL) \right) (v_0) \text{ (Prop. 12-)} \\ &= L((\exp tL)(v_0)) \text{ (Prop. 12-)} \\ &= L(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Soit  $(I, \psi)$  une solution du même problème de Cauchy, c'est à dire  $\psi'(t) = L(\psi(t))$  pour tout  $t \in I$  et  $\psi(0) = v_0$ .

L'application  $\theta(t) = \exp(-tL)(\psi(t))$  est dérivable sur  $I$  et

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= -(\exp -tL)(L(\psi(t))) + (\exp -tL)\psi'(t) \\ &= (\exp -tL)(\psi'(t) - L(\psi(t))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\theta$  est constante et  $\exp(-tL)(\psi(t)) = v_0$ , donc  $\psi(t) = (\exp tL)(v_0)$ .

$I$  étant quelconque, ceci assure l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy, et le fait que l'application linéaire  $v_0 \mapsto (\exp(t - t_0)L)(v_0)$  soit un isomorphisme.

■

#### Exercice (Une autre démonstration de l'unicité de la solution)

$\varphi$  et  $\psi$  ont le même sens que dans la démonstration. Posons  $\eta = \varphi - \psi$ .

Justifier la relation

$$\eta(t) = L \left( \int_0^t \eta(u) du \right).$$

On pose  $f(t) = \exp(-N(L)t) \int_0^t \|\eta(u)\| du$ ,  $t \in I$ .

En majorant  $\|\eta(t)\|$ , prouver que  $\frac{df}{dt}$  est négatif, en déduire que la fonction  $f$  est nulle, ainsi que  $\eta$ .

**Remarque 15.5** La résolution des équations (1) fait intervenir les exponentielles d'endomorphismes sous la forme  $\exp(tL)$ , et la relation suivante (Prop. 12-)

$$\frac{d}{dt} \exp(tL) = L \circ \exp(tL) = (\exp(tL)) \circ L.$$

Il importe de distinguer la nature des champs (uniformes)  $X(t, m) = L(\vec{om})$  et  $Y(t, L) = L$ , qui apparaissent ici comme vecteurs tangents aux arcs respectifs  $t \mapsto (\exp(t - t_0)L)(v_0)$

et  $t \mapsto \exp(tL)$ . Le premier est tracé sur  $\vec{E}$ , le second est tracé sur le groupe  $GL(\vec{E})$ . Ici, la relation s'établit facilement par l'évaluation du champ, cette facilité provient de ce que le groupe linéaire est un ouvert de l'algèbre  $L(\vec{E})$ , et qu'à ce titre l'espace tangent en chaque point (qui contient  $\frac{d}{dt} \exp(tL)$ ) est  $L(\vec{E})$ .

Cette situation n'est pas reproductible pour n'importe quel groupe  $G$  de transformations comme on le verra au chapitre 17, ce qui fournit une nouvelle conception de l'exponentielle<sup>165</sup>, par ailleurs nécessaire lorsque la définition en termes de série entière n'a plus de sens.

### 15.2.3.4 Calculs pratiques

En prenant  $t_0 = 0$ , le problème de Cauchy à résoudre est  $\frac{dm}{dt} = L(\vec{om})$ ,  $m(0) = v_0$ .

L'usage de sommes partielles de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} L^n(v_0)$  donne évidemment des approximations des solutions dans tous les cas.

Si l'on recherche des expressions "exactes", le problème de Cauchy est donné sous la forme  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0 = (v_0)_{\mathcal{B}}$  dans une base  $\mathcal{B}$ , et il s'agit de restituer la solution dans cette base.

1) Supposons que  $L$  est **diagonalisable**, et notons  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}^*$  de vecteurs propres  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ .

Le problème  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0$  s'écrit  $Y' = DY$ ,  $Y(0) = Y_0$  dans la base  $\mathcal{B}^*$ , avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = P^{-1}AP$ , et  $X = PY$ , donc

$$Y(t) = (\exp tD)(Y_0) = (\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_d}))(Y_0),$$

d'où

$$X(t) = P (\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_d}))(Y_0), X_0 = PY_0. \quad (4)$$

Remarquons que ceci n'exige pas le calcul de  $P^{-1}$ , sous réserve du calcul direct de  $Y_0$ .

Une autre démarche est d'écrire que  $X$  est combinaison linéaire des solutions de base  $\varphi_k(t) = e^{t\lambda_k} \varepsilon_k$ , les coefficients de cette combinaison étant déterminés par la relation  $X(0) = X_0$ .

#### Exercice

Comparer ces deux démarches pour résoudre le problème  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Solution

$\lambda_1 = 1$  valeur propre double,  $\varepsilon_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\varepsilon_2 = (2, 1, 0)$ ,  $\lambda_2 = -3$  valeur propre simple,  $\varepsilon_3 = (1, 2, -1)$ ,  $A$  est donc diagonalisable.

<sup>165</sup> Les "groupes à un paramètre", c'est à dire les morphismes dérivables de  $R$  dans  $G$ .

Il en résulte que  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et donc, si  $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

$$X(t) = P (\text{diag}(e^t, e^t, e^{-3t}) (Y_0) = e^t \begin{pmatrix} a + 2b \\ b \\ -a \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ -c \end{pmatrix}.$$

$X(0) = (1, 1, 1)$  donne  $a = -1, b = 1, c = 0$  donc

$$X(t) = e^t (1, 1, 1).$$

Autre écriture,

$$X(t) = \alpha e^t \varepsilon_1 + \beta e^t \varepsilon_2 + \gamma e^{-3t} \varepsilon_3,$$

et  $\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ , ce qui détermine les coefficients.

2) Si  $L$  n'est pas diagonalisable, la matrice de l'automorphisme  $\exp(t - t_0)L$  se calcule avec l'une des méthodes indiquées au chapitre 10. On se limite ici à un bref rappel suivi d'exemples. Les cas ici distingués ne sont pas disjoints, plusieurs méthodes sont donc possibles.

2-a) Si  $L$  ne possède qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , la solution du problème de Cauchy  $X' = AX, X(0) = X_0$  est

$$X(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda Id)^k (X_0).$$

**Exercice**

Résoudre le problème  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

*Solution*

$\lambda = -2$  est valeur propre triple, donc  $A$  est une matrice nilpotente d'ordre 3, et

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-2t} \left( I + t(A + 2I) + \frac{t^2}{2} (A + 2I)^2 \right) X_0 \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{3}{2}t^2 & t & t - \frac{3}{2}t^2 \\ t + \frac{3}{2}t^2 & 1 + t & -(2t + \frac{3}{2}t^2) \\ -2t + \frac{3}{2}t^2 & t & 1 + t - \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2-b) Si le **polynôme caractéristique** de  $L$  est **scindé**, autrement dit, si

$$P_L(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)^{m_i}$$

avec  $m_1 + \dots + m_p = d$ , on peut calculer  $\exp tA$  avec la décomposition de Dunford (Prop. 10-) ou rechercher une base de solutions en considérant les sous espaces spectraux

$$\text{Ker}(L - \lambda_i Id) \subset \text{Ker}(L - \lambda_i Id)^2 \subset \dots \subset \text{Ker}(L - \lambda_i Id)^{m_i}$$

$\mathbb{R}^d$  est la somme directe des  $p$  sous espaces spectraux  $F_i = \text{Ker}(L - \lambda_i Id)^{m_i}$ , de dimension  $m_i$ .

Si, pour  $i \in ]1, p]$ ,  $(v_{i,j})_{j \in ]1, m_i]}$  est une base de  $F_i$ , alors la suite de fonctions  $(\varphi_{i,j})$  définie par

$$\begin{aligned} &\varphi_{i,j}(t) \\ &= e^{\lambda_i t} \left( Id + \frac{t}{1!} (L - \lambda_i Id) + \dots + \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} (L - \lambda_i Id)^{m_i-1} \right) v_{i,j} \end{aligned}$$

est une base de l'espace des solutions de l'équation  $X' = L(X)$ .

**Exercice**

Résoudre le problème  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

*Solution*

La matrice  $A$  de  $L$  possède deux valeurs propres :  $\lambda_1 = -3/2$  de multiplicité 1, dont le sous espace propre est la droite de base  $u = (-2, 8, 5)$  et  $\lambda_2 = 1$ , de multiplicité 2, dont le sous espace propre est la droite de base  $v = (1, 1, 0)$ .

$L$  n'est donc pas diagonalisable, mais  $\text{Ker}(L - Id)^2$  est un plan, on prend un vecteur  $w$  de ce plan, non colinéaire à  $v$ , par exemple  $w = (1, 0, 2)$ , d'où une base de l'espace vectoriel des solutions:

$$e^{-\frac{3}{2}t}u \quad e^t(I + t(A - I))v \quad e^t(I + t(A - I))w.$$

**2-c)** S'il existe une base dans laquelle la matrice de  $L$  est **triangulaire**, on peut résoudre le système échelonné obtenu en changeant de base.

**Exercice**

Reprendre l'exercice précédent avec cette méthode.

*Solution*

On détermine les valeurs propres et sous espaces propres, les vecteurs  $u, v$  comme précédemment, puis on observe par exemple qu'avec  $k = (0, 0, 1)$ ,  $(u, v, k)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$

dans laquelle la matrice de  $L$  est  $B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , avec la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ L'équation équivalente } \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ se résout de proche$$

en proche :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 5ae^t \\ y_2(t) &= (4at + b)e^t \\ y_3(t) &= -\frac{a}{5}e^t + ce^{-3\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

et finalement,  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ . On observe qu'il n'est pas nécessaire de calculer  $P^{-1}$ .

**Remarque 15.6** La matrice  $A$  de  $L$  ayant des coefficients réels, on peut considérer que  $A$  est une matrice complexe puis retrouver les solutions réelles soit avec la partie réelle des solutions, soit en recherchant une base de solutions réelles par combinaison linéaire des éléments d'une base de solutions complexes.

**Exercice**



Appliquer cette méthode avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Solution

Dans  $L(\mathbb{C}^3)$ , les valeurs propres sont  $1, j, j^2$ , avec la base de vecteurs propres associés  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, j^2, j)$ ,  $v_3 = (1, j, j^2)$ , d'où la base de solutions complexes  $\varphi_1(t) = e^t v_1$ ,  $\varphi_2(t) = e^{jt} v_2$ ,  $\varphi_3(t) = e^{j^2 t} v_3$ .

Le choix  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left( \varphi_1, \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}, \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2i} \right)$  donne la base de solutions réelles

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= e^t v_1 \\ \psi_2(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}, \cos \left( \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \right), \cos \left( \frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ \psi_3(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \left( \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}, \sin \left( \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \right), \sin \left( \frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

### 15.2.3.5 Problème de Cauchy affine

L'étude précédente se prolonge aux équations "inhomogènes", c'est à dire aux champs de la forme  $\mathcal{X}(t, m) = L(\overrightarrow{om}) + B(t)$ , où  $\mathcal{X}$  est une application continue de  $I \times E$  dans  $\overrightarrow{E}$ ,  $I$  intervalle ouvert,  $L \in L(\overrightarrow{E})$  et  $B \in C^0(I, \overrightarrow{E})$ .  $B(t)$  est le "second membre".

Relativement à une base  $\mathcal{B}$  de  $\overrightarrow{E}$ , la traduction matricielle de l'équation  $m' = \mathcal{X}(t, m)$  est

$$\frac{dm_{\mathcal{B}}}{dt} = L_{\mathcal{B}} m_{\mathcal{B}} + B(t)_{\mathcal{B}},$$

où  $m_{\mathcal{B}}$  et  $B(t)_{\mathcal{B}}$  sont des matrices de taille  $d \times 1$ , que l'on écrira, en confondant le vecteur  $B$  et sa matrice,

$$X' = A X + B.$$

**Proposition 15.7**  $E$  est un espace affine de dimension  $d$ ,  $\overrightarrow{E}$  est l'espace directeur,  $o \in E$  est un point origine fixé.

1) Pour toute donnée de Cauchy  $(t_0, m_0) \in I \times E$ , il existe une solution unique  $(I, \varphi)$  du problème de Cauchy  $m' = L(\overrightarrow{om}) + B(t)$ ,  $\varphi(t_0) = m_0$ , définie sur  $I$ .

2) L'ensemble  $S$  des solutions maximales de l'équation  $m' = L(\overrightarrow{om}) + B(t)$  est un espace affine de dimension  $d$  dont l'espace directeur  $\overrightarrow{S}$  est l'espace des restrictions à  $I$  des solutions de l'équation homogène associée  $m' = L(\overrightarrow{om})$ .

### Démonstration

Identifions  $E$  et  $\overrightarrow{E}$ , et prenons  $t_0 = 0$ , pour simplifier les notations.

Il s'agit de déterminer une solution du problème de Cauchy donné sous la forme  $\varphi(t) = (\exp tL)(v(t))$ , où  $v$  est une fonction  $C^1$  de  $I$  dans  $\overrightarrow{E}$ .

En dérivant sur  $I$ , il vient par bilinéarité,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (L \circ \exp tL)(v(t)) + (\exp tL)(v'(t)) \\ &= (L \circ \exp tL)(v(t)) + B(t), \end{aligned}$$

donc

$$v'(t) = (\exp -tL)(B(t)),$$

soit

$$v(t) = \int_0^t (\exp -uL) (B(u)) \, du + cte.$$

D'où la solution

$$\varphi(t) = (\exp tL) \left( \int_0^t (\exp -uL) (B(u)) \, du + m_0 \right). \tag{5}$$

Le reste est immédiat. ■

Connaissant  $\vec{S}$ , la question pratique est dans la détermination d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

En pratique, les méthodes que l'on va proposer ne doivent être mises en oeuvre qu'après une réflexion sur l'éventualité d'une solution "évidente".

Par exemple, avec  $\vec{E} = \mathbb{R}$ ,  $x(t) = t$  est solution de  $x'' + x = t$ .

Avec  $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ ,  $(-t, 2)$  est solution de

$$\begin{aligned} x' &= -y + 1 \\ y' &= x + t. \end{aligned}$$

D'autre part, si le problème est posé dans le cadre des espaces réels, il peut s'avérer commode de prendre  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et ne retenir que la partie réelle des solutions trouvées. Une justification précise demanderait un développement sur l'insertion d'un espace vectoriel (ou affine) réel dans un espace complexe. Cette "complexification" ne sera ici mise en oeuvre que dans le cas particulier  $E = \mathbb{R}^d$ , que l'on supposera inclus dans  $\mathbb{C}^d$ .

### 15.2.3.6 Solution particulière : méthode de Lagrange

Généralisons la méthode de **variation des constantes de Lagrange** vue au § 15- pour le cas scalaire.

Il s'agit de rechercher une solution particulière  $\varphi$  de l'équation  $X' = A X + B$  sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^d a_k \varphi_k$$

où  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  est une base de  $\vec{S}$ , et  $(a_1, \dots, a_d)$  des fonctions scalaires à déterminer.

On constate que  $B = \sum_{k=1}^d (a_k)' \varphi_k$ .

D'autre part, l'isomorphisme de  $\vec{S}$  sur  $\mathbb{R}^d$  (Prop. 15-) permet d'affirmer que pour chaque  $t \in I$ , la liste  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$  est une base de  $\vec{E}$ , ce qui permet de décomposer  $B$  en fonction de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  sous la forme  $B(t) = \sum_{k=1}^d b_k(t) \varphi_k(t)$ .

De plus, les fonctions  $b_k$  ainsi définies sont de classe  $C^1$  sur  $I$ . Cela résulte des formules de Cramer pour le système linéaire d'inconnues  $b_k(t)$  obtenu en décomposant l'égalité ci-dessus dans une base  $\mathcal{B}$  de  $\vec{E}$ ,

$$b_k(t) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, B(t), \dots, \varphi_d(t))}{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots, \varphi_d(t))}.$$

Finalement, pour un choix arbitraire de  $t_0 \in I$ ,

$$\varphi = \sum_{k=1}^d \left( \int_{t_0}^t b_k(u) \, du \right) \varphi_k. \tag{6}$$

L'exemple qui suit complète le § 2-2.

**Définition 15.12** *Un oscillateur harmonique scalaire forcé est une équation scalaire du second ordre de la forme  $x'' + \omega^2 x = f$  où  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .*

Sous la forme  $X' = A X + B$ , cette équation s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

On connaît la base  $\varphi_1(t) = (\sin \omega t, \omega \cos \omega t)$ ,  $\varphi_2(t) = (\cos \omega t, -\omega \sin \omega t)$  de  $\vec{S}$ .

La recherche d'une solution particulière sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1(t) \sin \omega t + a_2(t) \cos \omega t \\ y(t) &= a_1(t) \omega \cos \omega t - a_2(t) \omega \sin \omega t \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \int f(t) \cos \omega t \\ a_2(t) &= -\int f(t) \sin \omega t. \end{aligned}$$

### Exercice

Résolution de l'équation affine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\omega_0, \omega) \in \mathbb{R}^2, \omega_0 \neq 0.$$

Ceci correspond à l'oscillateur  $x'' + \omega_0^2 x = -\omega \sin \omega t$ , mais avec  $x' = \omega_0 y$  au lieu de  $x' = y$  comme précédemment, pour éviter les automatismes !

### Solution

Solutions de l'équation homogène. Avec le vecteur propre  $Z = U + iV$ ,  $U = (\omega_0, 0)$ ,  $V = (0, \omega_0)$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution de l'équation complète avec la méthode de Lagrange, c'est à dire sous la forme

$$\varphi(t) = A(t) \begin{pmatrix} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{pmatrix} + B(t) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} A'(t) &= \sin \omega_0 t \cos \omega t = \frac{1}{2} (\sin(\omega_0 + \omega)t + \sin(\omega_0 - \omega)t) \\ B'(t) &= \cos \omega_0 t \cos \omega t = \frac{1}{2} (\cos(\omega_0 + \omega)t + \cos(\omega_0 - \omega)t), \end{aligned}$$

donc, si la pulsation  $\omega$  de  $f$  est distincte de  $\pm\omega_0$ ,

$$\begin{aligned} 2A(t) &= -\frac{\cos(\omega_0 + \omega)t}{\omega_0 + \omega} - \frac{\cos(\omega_0 - \omega)t}{\omega_0 - \omega} \\ 2B(t) &= \frac{\sin(\omega_0 + \omega)t}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin(\omega_0 - \omega)t}{\omega_0 - \omega}, \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi(t) = \left( \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t, \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t \right).$$

Si  $\omega = \omega_0$ ,

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{1}{2} \sin 2\omega t \\ B'(t) &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t), \end{aligned}$$

et par suite

$$\varphi(t) = \left( \frac{1}{4\omega} \sin \omega t + \frac{t}{2} \cos \omega t, -\frac{1}{4\omega} \cos \omega t - \frac{t}{2} \sin \omega t \right).$$

### 15.2.3.7 Solution particulière : cas où le second membre est une fonction quasi-polynômiale

**Définition 15.13** Une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\vec{E}$ , de la forme

$$B(t) = e^{\lambda t} (u_0 + tu_1 + \dots + t^d u_d)$$

où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(u_0, \dots, u_d) \in \vec{E}^{d+1}$ ,  $u_d \neq 0$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , est dite **quasi-polynômiale**.

$Q(t) = u_0 + tu_1 + \dots + t^d u_d$  est un "polynôme à coefficients dans  $\vec{E}$ ".

Avec ce type de second membre, la méthode consiste à effectuer le changement d'inconnue  $Y = e^{\lambda t} Z$ , c'est à dire que  $Y' = AY + B$  est remplacé par

$$Z' = (A - \lambda I) Z + Q.$$

Deux cas se présentent.

*Cas 1.*  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ . La matrice  $A - \lambda I$  est donc inversible, et l'on va prouver qu'il existe une solution de la forme

$$P(t) = v_0 + tv_1 + \dots + t^d v_d,$$

avec  $(v_0, \dots, v_d) \in \vec{E}^{d+1}$ ,  $v_d \neq 0$ .

En effet, la relation  $P'(t) = (A - \lambda I)P(t) + Q(t)$  est équivalente au système

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_d &= -u_d \\ (A - \lambda I)v_{d-1} &= dv_d - u_{d-1} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)v_1 &= 2v_2 - u_1 \\ (A - \lambda I)v_0 &= v_1 - u_0. \end{aligned}$$

*Cas 2.*  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ . Notons  $m$  son ordre de multiplicité.

Il revient au même de dire que 0 est valeur propre d'ordre  $m$  de  $A - \lambda I$ .

Notons  $\vec{E}_0$  le sous-espace caractéristique  $\ker (A - \lambda I)^m$  et  $\vec{F}$  la somme directe des sous-espaces caractéristiques des autres valeurs propres. On sait (Prop. 4-) que  $\vec{E} = \vec{E}_0 \oplus \vec{F}$ , et l'on cherche à appliquer la proposition 14-4-3).

Le polynôme  $Q$  se décompose en  $Q = Q_0 + Q_1$ ,  $Q_0$ , de degré  $\leq d$ , ayant ses coefficients dans  $\vec{E}_0$  et  $Q_1$ , de degré  $\leq d$ , ses coefficients dans  $\vec{F}$ .

Le sous-espace  $\vec{F}$  est stable par  $A - \lambda I$ , sur lequel il est inversible, ce qui ramène au cas 1. Il existe une solution particulière de l'équation  $Z' = (A - \lambda I)|_{\vec{F}} Z + Q_1$ , de la forme  $P_1(t)$ , polynôme à coefficients dans  $\vec{F}$ , de même degré que  $Q_1$ .

Le sous-espace  $\vec{E}_0$  est stable par  $A - \lambda I$ , sur lequel il est nilpotent. Il existe donc une solution particulière de l'équation  $Z' = (A - \lambda I)|_{\vec{E}_0} Z + Q_0$ , de la forme

$$\begin{aligned} Z_0(t) &= \int_{t_0}^t (\exp(t-u)(A - \lambda I))(Q_0(u)) du \\ &= \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-u)^k}{k!} (A - \lambda I)^k (Q_0(u)) du. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $Z_0(t)$  est un polynôme à coefficients dans  $\vec{E}_0$ , de degré au plus  $m + d$ .

En résumé, on a la proposition suivante.

**Proposition 15.8** Avec les notations précédentes, l'équation  $X' = AX + e^{\lambda t} Q(t)$  admet une solution particulière de la forme  $e^{\lambda t} P(t)$  où  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $\vec{F}$ .

Si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ ,  $\deg P = \deg Q$ .  
 Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , de multiplicité  $m$ ,  $\deg P \leq \deg Q + m$ .

En pratique,  $P$  est calculé par identification.

**Définition 15.14** *Un oscillateur harmonique scalaire amorti forcé est une équation de la forme  $x'' + ax' + \omega^2 x = f$ .*

## 15.2.4 Equations linéaires, cas non autonome

### 15.2.4.1 Situations/Modèles

#### 15.2.4.2 Notations

$E$  est un espace affine de dimension  $d$ ,  $\vec{E}$  est l'espace directeur,  $o \in E$  est un point origine fixé.

On envisage les champs sur  $E$  de la forme  $\mathcal{X}(t, m) = L(t)(\vec{om}) + B(t)$ , où  $L \in C^0(I, L(\vec{E}))$ ,  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $B \in C^0(I, \vec{E})$ , autrement dit les équations de la forme

$$\frac{dm}{dt} = L(t)(\vec{om}) + B(t) \tag{7}$$

Si  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , une application  $\varphi : I \rightarrow E$ , à priori  $C^0$ , telle que  $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$  est solution du problème de Cauchy  $m' = \mathcal{X}(t, m)$ ,  $\varphi(t_0) = m_0$  si et seulement si  $\varphi(t) = m_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(u, \varphi(u)) du$  pour tout  $t \in I$ .

Dans cette section, on sera amené à définir des fonctions  $\varphi$  de ce type sur des sous-intervalles compacts  $K$  de  $I$ . La relation  $\varphi'(t) = L(t)(\vec{om}) + B(t)$  sera vérifiée en tout point de  $K$ , mais il n'est pas recommandé de les appeler "solutions" pour éviter les contradictions avec la définition 14- et les diverses propriétés des solutions (qui justifient la définition posée).

Ce qui suit s'applique évidemment aux équations linéaires scalaires d'ordre  $n$ , c'est à dire de la forme

$$a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = 0,$$

en supposant que les fonctions scalaires  $a_0, \dots, a_n$  sont continues sur  $I$ , et que  $a_n$  **ne s'annule pas** sur  $I$ .

Une telle équation est équivalente à  $X' = A(t)X$ , avec  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  et  $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \text{ c'est à dire}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x, x_1 = x', \dots, x_{n-1} = x^{(n-1)} \\ x^{(n)} &= -\frac{a_0}{a_n}x - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{(n-1)}. \end{aligned}$$

### 15.2.4.3 Problème de Cauchy linéaire

**Proposition 15.9** *Pour toute donnée de Cauchy  $(t_0, m_0) \in I \times E$ , le problème de Cauchy  $\frac{dm}{dt} = L(t)(\vec{m})$ ,  $m(t_0) = m_0$ , admet une solution unique*

$\varphi_{(t_0, m_0)}$  définie sur  $I$ .

L'ensemble  $\vec{S}$  des solutions définie sur  $I$ , de l'équation  $\frac{dm}{dt} = L(t)(\vec{m})$  est un espace vectoriel, et pour tout réel  $t_0 \in I$ , l'application de  $\vec{S}$  dans  $\vec{E}$  qui associe le vecteur  $v_0 = \vec{m}_0$  à la solution  $\varphi_{(t_0, m_0)}$  est un isomorphisme linéaire, donc  $\dim \vec{S} = d$ ;

Démonstration

Pour simplifier les notations, on suppose que  $E = \vec{E}$ .

Etape 1

Le couple  $(t_0, m_0) \in I \times E$  étant donné, on démontre que pour tout segment  $K$  inclus dans  $I$ , et contenant  $t_0$ , il existe une application  $\varphi$  et une seule, continue sur  $K$ , à valeurs dans  $E$ , telle que  $\varphi(t) = m_0 + \int_{t_0}^t L(u)\varphi(u) du$  pour tout  $t \in K$ .

Pour cela, on se place dans l'espace  $\mathcal{E} = C^0(K, E)$  qui est complet pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de convergence uniforme (Prop. 9-), et l'on note  $f$  application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par  $f(x)(t) = m_0 + \int_{t_0}^t L(u)x(u) du$ .

Il existe un entier  $p$  pour lequel l'application itérée  $f^p$  est contractante. En effet, si  $\|\cdot\|$  est une norme dans  $\vec{E}$ , et  $N$  la norme subordonnée dans  $L(\vec{E})$ , on a

$$\begin{aligned} \|f(x)(t) - f(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t L(u)(y(u) - x(u)) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|L(u)(y(u) - x(u))\| du \right| \\ &\leq N|t - t_0| \|y - x\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour un entier  $p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \|f^p(x)(t) - f^p(y)(t)\| &\leq N \left| \int_{t_0}^t \|(f^{p-1}(y)(u) - f^{p-1}(x)(u))\| du \right| \\ &\leq N^2 \left| \int_{t_0}^t |u - t_0| du \right| \|f^{p-1}(y) - f^{p-1}(x)\|_\infty \\ &= N^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} \|f^{p-1}(y) - f^{p-1}(x)\|_\infty \end{aligned}$$

donc, par récurrence,

$$\|f^p(x)(t) - f^p(y)(t)\| \leq N^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|y - x\|_\infty$$

d'où, si  $l$  est la longueur de  $K$ ,

$$\|f^p(x) - f^p(y)\|_\infty \leq N^p \frac{l^p}{p!} \|y - x\|_\infty,$$

ce qui donne la conclusion sachant que  $N^p \frac{l^p}{p!} < 1$  pour  $p$  assez grand.

Etape 2

L'application donnée est linéaire et bijective d'après l'étape précédente. ■

Le corollaire suivant est immédiat, mais utile.

**Corollaire 15.10** *Avec les hypothèses de la proposition, le réel  $t_0$  étant fixé, pour qu'une*

liste  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  d'éléments de  $\vec{S}$  soit une base de  $\vec{S}$ , il faut et il suffit que la liste  $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_d(t_0))$  soit une base de  $\vec{E}$ .

En particulier, le déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$ , relativement à une base  $\mathcal{B}$  de  $\vec{E}$  est non nul quel que soit  $t \in I$ .

**Définition 15.15** Ce déterminant, noté  $W(t)$ , est appelé **Wronskien** (ou déterminant de Wronski) de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 15.11** Si  $(t_0, t) \in I^2$ , alors

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Tr } L(u) \, du \right).$$

Démonstration

Par linéarité,

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} \left( \varphi_1(t), \dots, \varphi_i'(t), \dots, \varphi_d(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}} \left( \varphi_1(t), \dots, L(\varphi_i(t)), \dots, \varphi_d(t) \right) \\ &= \text{Tr } L(t) \det_{\mathcal{B}} \left( \varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t) \right) \quad (\S 2-2-7, \text{ Ex. 4}). \end{aligned}$$

Le résultat s'en suit, en résolvant l'équation scalaire  $W'(t) = \text{Tr } L(t) W(t)$ . ■

Lorsque l'équation est scalaire, de la forme

$$a_n(t) x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = 0,$$

$a_n$  ne s'annulant pas sur  $I$ . Pour  $t_0 \in I$ , l'isomorphisme de l'espace  $\vec{S}$  des solutions sur  $\mathbb{K}^n$  associée à la solution  $\varphi$  la liste  $(\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0))$ .

L'expression du Wronskien dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est alors

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Il s'en suit que

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)} \, du \right). \quad (9)$$

Mis à part les cas particuliers  $d = 1$  ou  $L(t)$  constant, il n'existe pas de procédé pratique de portée générale pour trouver un élément particulier de  $S$ . Au cas par cas, on cherche à obtenir une base de  $\vec{S}$  à l'aide de solutions de type connu telles que polynômiales ou analytiques (s'il en existe), ou exponentielles. Donnons quelques exemples.

Ex. 1) Lorsque les éléments de la famille  $(L(t))_{t \in I}$  commutent deux à deux, le théorème de réduction simultanée (Prop. 4-) indique l'existence d'un changement de base indépendant de  $t$ . Lorsque  $L(t)$  est diagonalisable, la propriété 2) de la proposition 14- se prolonge ainsi (vérifier) : Si  $\lambda(t)$  est une valeur propre de  $L(t)$ , et  $v_0$  un vecteur propre associé, indépendant de  $t$ , alors la fonction  $t \rightarrow e^{\int \lambda(t)} v_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est une solution de  $\frac{dm}{dt} = L(t)(\vec{om})$ .

- a) Rechercher une base de  $\vec{S}$  pour le système  $X' = A(t)X$ , avec  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t & t \\ t & 0 & -t \\ -t & t & 0 \end{pmatrix}$ .
- b) Même question avec  $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} + 2t & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 3t & t - \frac{1}{t} \\ 2(\frac{1}{t} - t) & 0 & \frac{2}{t} + t \end{pmatrix}$ ,  $I = ]0, +\infty[$ .

Ex. 2) Pour les équations linéaires scalaires d'ordre  $n$ , dont les coefficients sont analytiques, une méthode consiste à rechercher une base de solutions sommes de séries entières (sans justifier ici la généralité d'une telle méthode).

Rechercher une base de solutions sur  $I = ]-1, 1[$  de l'équation scalaire  $4(1 - t^2)x''(t) - 4tx'(t) + x(t) = 0$ .

Ex. 3) a) Dans le cas plus particulier du second ordre, lorsqu'une solution "évidente"  $\varphi_1$  apparaît, il peut être utile de rechercher une solution indépendante  $\varphi_2$  sous la forme  $\varphi_2(t) = \lambda(t)\varphi_1(t)$ .

Rechercher ainsi une base de solutions de l'équation scalaire  $(1 + t^2)x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0$ , avec  $I = \mathbb{R}$ .

b) Une méthode voisine consiste à choisir  $\varphi_2$  parmi les solutions du système

$$\begin{cases} W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{a_1(u)}{a_2(u)} du\right) \\ \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2}. \end{cases}$$

Retrouver la solution  $\varphi_2$  précédemment obtenue.

*Solution Ex. 1-a)*

Dans un premier temps, on envisage les solutions à valeurs dans  $C^3$ .  $A(t)$  est diagonalisable, les valeurs propres sont  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = it\sqrt{3}$ ,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ , avec une base de vecteurs propres associée

$$(Z_0, Z_1, Z_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{Z_1} \right).$$

$(Z_1, Z_2)$  est une base du plan orthogonal du noyau.

D'où les solutions indépendantes  $\psi_0(t) = 1$ ,  $\psi_1(t) = e^{\frac{it^2\sqrt{3}}{2}}Z_1$ ,  $\psi_2(t) = \overline{\psi_1(t)}$ .

On en déduit une base de l'espace des solutions réelles en prenant

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \psi_0(t) = 1 \\ \varphi_1(t) &= \frac{\psi_1(t) + \psi_2(t)}{2} = \operatorname{Re} \psi_1(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \frac{t^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{t^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) &= \frac{\psi_1(t) - \psi_2(t)}{2i} = \operatorname{Im} \psi_1(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \frac{t^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{t^2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Réponse Ex. 1-b)*

Valeur propre double  $3t$ , valeur propre  $\frac{3}{t}$ , base de vecteurs propres  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 2)$ ,



base de solutions

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3t^2}{2}} \\ 0 \\ -e^{\frac{3t^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{3t^2}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix}.$$

*Solution Ex. 2*

$I$  étant centré à l'origine, il est cohérent de rechercher s'il existe des solutions de la forme  $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ , le rayon de convergence de la série étant au moins égal à 1. Dans  $I$ , on doit avoir

$$4(1-t^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 4t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

c'est à dire

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n - 4 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^n - 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Pour  $n \geq 3$ , l'annulation du coefficient de  $t^n$  donne la relation

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n.$$

A priori, rien n'indique que cette relation se prolonge à  $n = 0, 1, 2$ . En fait, c'est le cas sachant que pour ces valeurs de  $n$ , on obtient respectivement  $8a_2 + a_0 = 0$ ,  $24a_3 - 3a_1 = 0$ ,  $48a_4 - 15a_2 = 0$ .

On a ainsi  $a_{2p}$  en fonction de  $a_0$  pour  $p \geq 1$ , et  $a_{2p+1}$  en fonction de  $a_1$  pour  $p \geq 1$ .

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{1}{2p!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - 2p + 1\right) a_0 \\ a_{2p+1} &= \frac{1}{(2p+1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (2p+1) + 1\right) 2a_1. \end{aligned}$$

En prenant  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$ , puis  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -\frac{1}{2}$ , on reconnaît les développements en séries entières de  $\sqrt{1+t}$  et  $\sqrt{1-t}$  (rayon 1) qui constituent ainsi une base de solutions.

*Solution Ex. 3-a*

Sur  $R$ , la solution  $\varphi_1(t) = t$  est évidente. En posant  $\varphi_2(t) = t \lambda(t)$ , on voit qu'il convient de raisonner séparément sur  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ .

On doit avoir  $(1+t^2)t\lambda''(t) + (2(t^2+1)+t^2)\lambda'(t) = 0$ , soit

$$(\lambda')' = -\frac{3t^2+2}{t^3+t}\lambda'.$$

Or,  $\int \frac{3t^2+2}{t^3+t} = \log(t^3+t) + \log t - \frac{1}{2} \log(t^2+1)$ , donc  $\lambda' = \frac{k}{t^2\sqrt{t^2+1}}$ , et par suite

$$\lambda(t) = -\frac{k\sqrt{t^2+1}}{t} + h, \quad (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement,  $\varphi_2(t) = \sqrt{t^2+1}$  est une solution indépendante de  $\varphi_1$ , et l'on voit que  $(t, \sqrt{t^2+1})$  est une base de solutions sur  $R$ .

*Solution Ex. 3-b*

Les constantes étant arbitraires, on peut écrire  $\left(\frac{\varphi_2}{t}\right)' = \frac{k \exp\left(-\int \frac{u}{u^2+1}\right)}{t^2}$ , ce qui ramène au calcul précédent.

#### 15.2.4.4 Problème de cauchy affine

La propriété suivante est évidente.

**Proposition 15.12** Avec les hypothèses du § 14-, l'ensemble  $S$  des solutions définies sur  $I$  de l'équation  $\frac{dm}{dt} = L(t)(\vec{om}) + B(t)$  est un espace affine dont l'espace directeur  $\vec{S}$  est

donné par la proposition précédente.

Indiquons quelques procédés permettant de calculer une solution particulière de l'équation affine.

1) La *méthode de Lagrange*.

Par analogie avec les équations linéaires à coefficients constants, une méthode de recherche d'une solution particulière  $\varphi$  de l'équation  $X' = A X + B$  consiste à prendre

$$\varphi = \sum_{k=1}^d a_k \varphi_k$$

connaissant une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  de  $\vec{S}$ , et  $(a_1, \dots, a_d)$  des fonctions scalaires à déterminer.

En dérivant,

$$\begin{aligned} \varphi' &= L(t)\varphi + B(t) = \sum_{k=1}^d a'_k \varphi_k + \sum_{k=1}^d a_k \varphi'_k \\ &= \sum_{k=1}^d a'_k \varphi_k + \sum_{k=1}^d a_k L(t) \varphi_k \end{aligned}$$

$$\text{donc } B(t) = \sum_{k=1}^d a'_k \varphi_k.$$

Connaissant l'expression de  $B(t) = \sum_{k=1}^d b_k \varphi_k$  en fonction de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ , on en déduit, pour un choix arbitraire de  $t_0$ ,

$$\varphi = \sum_{k=1}^d \left( \int_{t_0}^t b_k(u) du \right) \varphi_k.$$

**Exercice**

Déterminer une solution de l'équation

$$4(1-t^2)x''(t) - 4tx'(t) + x(t) = \frac{1}{1-t}, I = ]-1, 1[$$

sachant que  $(\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})$  est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène.

*Solution*

On cherche une solution sur  $I$  de la forme  $\varphi(t) = a(t)\sqrt{1-t} + b(t)\sqrt{1+t}$ .

En reportant dans l'équation, on trouve après simplification,  $b'(t) = \frac{-1}{4(1-t)\sqrt{1-t}}$ , donc par exemple  $b(t) = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}$ , et

$$a'(t) = \frac{1}{4(1-t)\sqrt{1+t}}.$$

Comme d'habitude une primitive s'obtient à l'aide du changement de variable  $u = \sqrt{1+t}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{2-u^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \int \frac{du}{\sqrt{2}-u} + \int \frac{du}{\sqrt{2}+u} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+t}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+t}}. \end{aligned}$$

### 15.2.5 Résolution d'un problème de Cauchy-Lipschitz

Revenons sur le problème de Cauchy scalaire  $x' = x^2$ ,  $x(0) = x_0$ .

Si  $x_0 > 0$ , et  $t_0 = 0$ , le raisonnement suivant est licite.

Soit  $(J, \varphi)$  une solution, alors par continuité,  $\varphi(t)$  ne s'annule pas dans un voisinage  $J'$  de 0, inclus dans  $J$ , donc pour  $t \in J'$ ,

$$1 = \frac{\varphi'}{\varphi^2} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varphi} \right)$$

et par suite

$$\forall t \in J', \varphi(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

La seule conclusion de ce qui précède est que  $\left( I = \right] -\infty, \frac{1}{x_0} [$ ,  $\psi(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$ ) est une solution du problème de Cauchy  $(0, x_0 > 0)$ , et pour toute solution  $(J, \varphi)$ , il existe un voisinage  $J'$  de 0 inclus dans  $J$ , dans lequel  $\varphi$  et  $\psi$  ont même restriction. Il est clair que  $J \subset I$ , mais cela ne prouve pas que  $J' = J$ , et rien n'a été obtenu sur l'unicité de la solution constante  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , lorsque  $x_0 = 0$ .

Les résultats de cette section apportent à ces questions des réponses en termes d'existence et d'unicité, à défaut d'expressions explicites comparables au cas linéaire autonome.

On prendra  $E = \vec{E} = \mathbb{R}^d$ , ce qui revient à fixer un repère de  $E$ .

#### 15.2.5.1 Cylindres de confinement

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz (Prop. 14-14) repose sur la même méthode que pour le cas linéaire. Il s'agira d'établir l'existence d'un point fixe pour la transformation  $F(x) = m_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(u, x(u)) du$ . Pour borner la variation de l'intégrale, il ne suffit pas de limiter la variation de  $|t - t_0|$ , une borne de la variation du champ est nécessaire, et celle-ci doit être uniforme relativement à la variation de l'arc  $x(t)$ . Pour cela, introduisons une nouvelle notion.

**Définition 15.16** Supposons donné un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , un champ  $\mathcal{X} \in C^0(U, \mathbb{R}^d)$ , et  $(t_0, m_0) \in U$ . Un **cylindre de confinement**<sup>166</sup> ouvert (resp. fermé) de centre  $(t_0, m_0)$  est un produit  $C = I_0 \times B_0$  où  $I_0$  est un intervalle ouvert (resp. fermé) de centre  $t_0$ , de rayon  $l > 0$ , et  $B_0$  une boule ouverte (resp. fermée) dans  $\mathbb{R}^n$ , de centre  $m_0$ , de rayon  $r > 0$ , tels que

- 1)  $C \subset U$
- 2)  $\sup_{(t,x) \in C} \|\mathcal{X}(t, x)\| < \frac{r}{l}$ .

**Remarque 15.7** Avec les notations de la définition, si  $C = I_0 \times B_0$  est un cylindre de confinement, tout point  $(t, x)$  intérieur à  $C$  est centre d'un cylindre de confinement (homothétique) contenu dans  $C$ .

Il suffit en effet de remplacer  $(r, l)$  par  $(r', l')$  avec  $\frac{r'}{l'} = \frac{r}{l}$ ,  $0 < l' < l - |t - t_0|$ ,  $0 < r' < r - \|x - m_0\|$ .

**Exemple 15.13** Avec  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{X}(t, x) = x^2$ , et  $(t_0, m_0) = (0, 1)$ , pour  $r = 1$ , vérifier que  $l < \frac{1}{4}$  convient. Généraliser à  $r < 1$ .

<sup>166</sup> ou cylindre de sécurité, ou tonneau de sécurité.

**Proposition 15.13** Soit  $\mathcal{X} \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ . Supposons qu'il existe une solution  $(I, \varphi)$  satisfaisant à la donnée de Cauchy  $(t_0, m_0)$ , et un cylindre de confinement  $C = I_0 \times B_0$  de centre  $(t_0, m_0)$ . Alors le graphe de la restriction de  $\varphi$  à  $I \cap I_0$  est inclus dans  $C$ .

Démonstration

Supposons qu'il existe  $t_1 \in I \cap I_0$  tel que  $\|\varphi(t) - m_0\| > r$  avec, par exemple  $t_1 > t_0$ . L'ensemble des réels  $t$  vérifiant les conditions

$$t \geq t_0, \quad t \in I \cap I_0, \quad \forall u \in [t_0, t], \quad \|\varphi(t) - m_0\| < r$$

est non vide, majoré par  $t_1$ , donc possède une borne supérieure  $t_M \in [t_0, t_1]$ , donc  $t_M \in I \cap I_0$ .

On a d'une part  $\|\varphi(t_M) - m_0\| = r$  par continuité,

d'autre part, pour  $t \in [t_0, t_M]$ ,  $\|\varphi'(t)\| = \|\mathcal{X}(t, \varphi(t))\| < \frac{r}{l}$ , donc

$$\|\varphi(t_M) - m_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t_M} \mathcal{X}(u, \varphi(u)) du \right\| \leq (t_M - t_0) \sup_{(t,x) \in C} \|\mathcal{X}(t, x)\| < r,$$

ce qui est contradictoire. ■

Pour la suite, convenons que  $I_0$  désignera un intervalle ouvert, et  $B_0$  une boule ouverte, les cylindres de confinement fermés seront alors notés  $\overline{I_0} \times \overline{B_0}$ .

**Proposition 15.14** Etant donné un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 1$ , et un champ  $\mathcal{X} \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ , tout point  $(t_0, m_0) \in U$  est centre d'un cylindre de confinement fermé sur lequel  $\mathcal{X}$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Démonstration

L'application  $d\mathcal{X}$  est continue de  $U$  dans l'espace vectoriel  $L(\mathbb{R}^d)$  (sur lequel la norme est notée  $N$ ), et  $U$  est localement compact donc  $d\mathcal{X}$  est localement bornée. Plus précisément, il existe dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  une boule fermée  $A = \overline{B}((t_0, m_0), \rho)$  contenue dans  $U$  sur laquelle

$$N(d\mathcal{X}(t, x)) \leq N(d\mathcal{X}(t_0, m_0)) + 1 = k$$

Cette boule étant convexe, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall (t_1, x_1) \in A, \quad \forall (t_2, x_2) \in A, \quad \|\mathcal{X}(t_1, x_1) - \mathcal{X}(t_2, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

Autrement dit,  $\mathcal{X}$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $A$ .

On choisit alors  $l > 0$  et  $r > 0$  tels que d'une part

$$C = I_0 \times B_0 = [t_0 - l, t_0 + l] \times \overline{B}(m_0, r) \subset A$$

et d'autre part,  $l \leq \frac{r}{M}$  où  $M = \sup_{(t,x) \in A} \|\mathcal{X}(t, x)\|$ .

On aura alors  $\sup_{(t,x) \in C} \|\mathcal{X}(t, x)\| \leq M < \frac{r}{l}$ . ■

### 15.2.5.2 Solutions locales

**Proposition 15.15** (Théorème de **Cauchy-Lipschitz**)<sup>167</sup>.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 1$ , un champ  $\mathcal{X} \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ , et  $(t_0, m_0) \in U$  une donnée de Cauchy.

Pour tout cylindre de confinement fermé  $C = \overline{I_0} \times \overline{B_0}$  centré en  $(t_0, m_0)$ , sur lequel  $\mathcal{X}$  est  $k$ -lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, le sous ensemble  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$

<sup>167</sup> Le théorème reste valide, avec la même démonstration, si l'on suppose seulement que  $f$  est continue sur  $U$  et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

de l'espace vectoriel  $C^0(\overline{I_0}, \mathbb{R}^n)$  est muni de la distance induite par la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de la convergence uniforme.

$C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$  est alors un espace métrique complet, stable par l'application

$$F : C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0}) \rightarrow C^0(\overline{I_0}, \mathbb{R}^n)$$

qui transforme une fonction  $x$  en  $y$ , définie par

$$y(t) = m_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(u, x(u)) du.$$

De plus,  $F$  admet une itérée  $F^p$  contractante sur  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$ , donc  $F$  possède un point fixe unique  $\varphi \in C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$ .

Il en résulte les conséquences suivantes :

1)  $(I_0, \varphi|_{I_0})$  est une solution<sup>168</sup> du problème de Cauchy  $x' = \mathcal{X}(t, x)$ ,  $x(t_0) = m_0$ .

Pour simplifier, on notera  $\varphi$  la restriction  $\varphi|_{I_0}$ .

2) Si  $(I_0, \eta)$  est une solution du même problème de Cauchy, définie sur l'intervalle ouvert  $I_0$ , alors  $\eta = \varphi$ .

#### Démonstration

Le point  $(t_0, m_0) \in U$  étant donné, prenons un cylindre de confinement fermé  $C = \overline{I_0} \times \overline{B_0}$  centré en ce point.

Sachant que  $C^0(\overline{I_0}, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme,  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$  est complet si et seulement si c'est une partie fermée. Or, pour tout réel  $u \in \overline{I_0}$ , l'application

$$\lambda_u : C^0(\overline{I_0}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ définie par } \lambda_u(x) = x(u)$$

est linéaire, et continue, de norme  $N(\lambda_u)$  inférieure à 1 car  $\|\lambda_u(x)\| \leq \|x\|_\infty$ . Chaque ensemble  $\lambda_u^{-1}(\overline{B_0})$  est une partie fermée de  $C^0(\overline{I_0}, \mathbb{R}^n)$ , l'intersection de ces fermés lorsque  $u \in \overline{I_0}$ , qui n'est autre que  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$  est donc fermée.

La stabilité de  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$  par  $F$  résulte de l'inégalité suivante, vérifiée pour tout  $t \in \overline{I_0}$

$$\|x(t) - m_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \mathcal{X}(u, x(u)) du \right\| \leq l \sup_{(t,x) \in C} \|\mathcal{X}(t, x)\| < r$$

Enfin,  $\mathcal{X}$  étant  $k$ -lipschitzienne sur  $C$ , si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$ , on a pour tout  $t \in \overline{I_0}$ ,

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fy(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathcal{X}(u, x(u)) - \mathcal{X}(u, y(u))\| du \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^t \|x(u) - y(u)\| du \right| \\ &\leq k|t - t_0| \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|F^2x(t) - F^2y(t)\| &\leq k \left| \int_{t_0}^t \|Fx(u) - Fy(u)\| du \right| \\ &\leq k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2!} \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne, pour  $p$  entier,

$$\begin{aligned} \|F^p x(t) - F^p y(t)\| &\leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|x - y\|_\infty \\ &\leq k^p \frac{l^p}{p!} \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

<sup>168</sup> Suivant les conventions adoptées dans la définition d'un cylindre de sécurité fermé, l'intervalle  $I_0$  est supposé ouvert.

L'application  $F^p$  est donc contractante pour  $p$  assez grand, et le théorème du point fixe donne l'existence et l'unicité d'un point  $x \in C^0(\overline{I_0}, \overline{B_0})$  invariant par  $F$ .

La conséquence 1) est évidente.

Pour démontrer la conséquence 2), sachant que le graphe de  $y$  est inclus dans  $C$ , il reste à prolonger  $y$  par continuité à  $\overline{I_0}$ . La boule  $\overline{B_0}$  étant fermée, le graphe de ce prolongement  $\tilde{y}$  sera inclus dans  $C$ , et  $\tilde{y}$  sera un point fixe de  $F$ .

Or, pour  $t \in I_0$ ,

$$\|y'(t)\| = \|\mathcal{X}(t, y(t))\| \leq \sup_{(t,x) \in C} \|\mathcal{X}(t, x)\| < \frac{r}{l}$$

Il résulte de cette inégalité que l'image d'une suite convergente de points de  $I_0$ , dont la limite est  $t_0 + l$  ou  $t_0 - l$ , est de Cauchy donc convergente, d'où le prolongement cherché. ■

**Remarque 15.8** Dans la démonstration précédente, on peut aussi choisir  $l$  assez petit pour que  $kl < 1$ , dans ces conditions  $F$  est contractante (autrement dit,  $p = 1$ ).

**Corollaire 15.16** Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, le résultat suivant exprime une propriété d'"unicité locale".

Si  $(I, \varphi)$  et  $(J, \eta)$  sont deux solutions du même problème de Cauchy  $x' = \mathcal{X}(t, x)$ ,  $x(t_0) = m_0$ , alors  $\varphi$  et  $\eta$  coïncident sur l'intervalle ouvert  $I \cap J$ .

Démonstration

Si  $(I, \varphi)$  et  $(J, \eta)$  sont deux solutions du même problème de Cauchy  $x' = \mathcal{X}(t, x)$ ,  $x(t_0) = m_0$ , alors il existe un intervalle ouvert  $I'_0$  contenu dans  $I \cap J$ , sur lequel  $x$  et  $\eta$  ont même restriction.

En effet,  $(t_0, m_0)$  est centre d'un cylindre de confinement fermé  $C = \overline{I_0} \times \overline{B_0}$  qui contient les graphes des restrictions à  $I \cap J \cap I_0$  de  $\varphi$  et  $\eta$ . Les intervalles  $I, J$  étant ouverts, il existe  $l' \in ]0, l]$  tel que  $\overline{I'_0} = [t_0 - l', t_0 + l']$  soit contenu dans  $I \cap J \cap I_0$ , et  $C' = \overline{I'_0} \times \overline{B_0}$  est un cylindre de confinement fermé centré en  $(t_0, m_0)$ , sur lequel le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que  $\varphi$  et  $\eta$  ont même restriction à  $I'_0$ .

L'ensemble des points  $t \in I \cap J$  sur lesquels les solutions  $\varphi$  et  $\eta$  prennent les mêmes valeurs est non vide, évidemment fermé, et ouvert d'après le raisonnement précédent, il est donc égal à  $I \cap J$  qui est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}$ . ■

### 15.2.5.3 Solutions maximales

Dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, on muni l'ensemble  $\mathcal{E}$  des solutions d'un problème de Cauchy de la relation d'ordre  $(I, \varphi) \preceq (J, \eta)$  si  $I \subset J$ .

Le corollaire ci-dessus montre que dans ce cas,  $\eta$  est nécessairement un prolongement de  $\varphi$ . Pour cet ordre, deux solutions admettent un minorant (défini sur l'intersection des intervalles) et un majorant (défini sur la réunion).

Les éléments maximaux de  $\mathcal{E}$  sont donc les solutions non prolongeables.

**Proposition 15.17** Avec les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on a les résultats suivants :

Pour toute donnée de Cauchy  $(t_0, m_0)$ , l'ensemble ordonné  $(\mathcal{E}, \preceq)$  des solutions du problème de Cauchy  $m' = \mathcal{X}(t, m)$ ,  $m(t_0) = m_0$  possède un plus grand élément, on le notera  $(I_{(t_0, m_0)}, \varphi_{(t_0, m_0)})$ , et plus simplement  $(I_{m_0}, \varphi_{m_0})$  si  $t_0 = 0$ .

Ce plus grand élément est donc l'unique élément maximal de  $\mathcal{E}$ .

**Définition 15.17** *Le plus grand élément de  $(\mathcal{E}, \preceq)$  est appelé solution **maximale** du problème de Cauchy.*

Démonstration

$\mathcal{E}$  est non vide (Théorème de Cauchy-Lipschitz), et la réunion de tous les intervalles ouverts sur lesquels sont définies les solutions du problème de Cauchy est un intervalle ouvert  $I_{(t_0, m_0)}$  contenant  $m_0$ . Si  $t \in I_{(t_0, m_0)}$ , il existe une solution  $(I, \varphi)$  du problème de Cauchy telle que  $t \in I$ , et en posant  $\varphi_{(t_0, m_0)}(t) = \varphi(t)$ , on définit une solution, indépendante du choix de  $\varphi$  pour chaque valeur de  $t$  d'après le corollaire -.

Ce même corollaire prouve que toute solution  $(J, \eta)$  vérifie  $(J, \eta) \preceq (I_{(t_0, m_0)}, \varphi_{(t_0, m_0)})$ , enfin pour toute relation d'ordre, un élément maximal est unique s'il existe. ■

**Définition 15.18** *Le champ  $\mathcal{X}$  de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times E$  est **complet** si chaque solution maximale d'un problème de Cauchy est définie sur  $\mathbb{R}$ . Ceci suppose évidemment que la première projection de  $U$  soit égale à  $\mathbb{R}$ .*

**Proposition 15.18** *Les courbes intégrales de deux solutions maximales sont disjointes, et pour un champ autonome, les orbites de solutions maximales sont disjointes ou confondues.*

Démonstration

Le premier point est évident.

Soit  $\mathcal{X}$  un champ de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$ , et  $(I_1, \varphi_1)$ ,  $(I_2, \varphi_2)$  des solutions maximales vérifiant respectivement les conditions de Cauchy  $\varphi_1(0) = m_1$ ,  $\varphi_2(0) = m_2$ , d'orbites  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ . S'il existe  $m \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ , on peut écrire  $m = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$ .

Posons  $\varphi(t) = \varphi_1(t - t_2 + t_1)$  pour  $t \in J = \{t + t_2 - t_1, t \in I_1\}$ .

On a  $\varphi'(t) = \mathcal{X}(\varphi(t))$  et  $\varphi(t_2) = \varphi_1(t_1) = m$ , les solutions  $(J, \varphi)$  et  $(I_2, \varphi_2)$  sont donc égales, et par suite  $\varphi(J) = \varphi_2(I_2)$ .

D'autre part,  $\varphi(J) = \varphi_1(I_1)$  en raison de l'invariance par translation du temps (Prop. 14-), soit  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ . ■

#### 15.2.5.4 Equations à variables séparées

Dans les exemples introductifs, on a donné les solutions des équations scalaires non linéaires  $x' = \frac{t}{x}$ , ou  $x' = x^2$ , passant sous silence une quelconque méthode. L'argument de "l'évidence" n'est pas à rejeter, mais il est subjectif par essence (l'origine physique d'une équation, l'expérience,...). Comme pour les équations linéaires, un procédé qui reste à justifier consiste à transformer les équations. Par exemple transformer  $x' = \frac{t}{x}$  en  $xx' = t$  et  $x' = x^2$  en  $\frac{dx}{dt} = x^2$  puis  $\frac{dx}{x^2} = dt$  et prendre une primitive.

Plus généralement, les équations scalaires de la forme  $x' = \frac{a(t)}{b(x)}$ , dites à **variables séparées** sont transformées en  $b(x)dx = a(t)dt$ , mais en l'absence de justification cette transformation reève de la prestidigitation. Sans anticiper le chapitre suivant consacré aux formes différentielles, la proposition qui suit donne des renseignements suffisants pour les exemples usuels.

**Proposition 15.19**  *$a$  et  $b$  sont des fonctions réelles, respectivement  $C^0$  sur un intervalle ouvert  $I_1$  et  $C^1$  sur un intervalle ouvert  $I_2$  sur lequel  $b$  ne s'annule pas.  $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$  et  $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $f(t, x) = \int_{x_0}^x b(y)dy - \int_{t_0}^t a(u)du$ .*

Alors,

1)  $\Gamma = f^{-1}(0)$  est une courbe régulière de  $\mathbb{R}^2$ , passant par le point  $(t_0, x_0)$ .

2) La courbe intégrale  $(t, \varphi(t))$  de la solution maximale du problème de Cauchy  $(x' = \frac{a(t)}{b(x)}, x(t_0) = x_0)$  est contenue dans  $\Gamma$ .

Démonstration

1) En tout point de  $\Gamma$ ,  $(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}) = (-a(t), b(x)) \neq (0, 0)$ .

2)  $f(t, \varphi(t)) = 0$  pour  $t = t_0$ , et  $f(t, \varphi(t))$  est constante sachant que  $\frac{d}{dt}f(t, \varphi(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \varphi'(t)\frac{\partial f}{\partial x} = -a(t) + \frac{a(t)}{b(x)}b(x) = 0$ . ■

**Exemple 15.14** Pour l'équation scalaire  $x' = x^3$ ,  $a(t) = 1$ ,  $b(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $I_1 = \mathbb{R}$ ,  $I_2 = ]0, +\infty[$  (par exemple),

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{y^3} dy - \int_{t_0}^t du \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x_0^2} \right) - t + t_0. \end{aligned}$$

L'équation implicite de  $\Gamma$  est  $\frac{1}{x^2} + 2 \left( t - t_0 - \frac{1}{2x_0^2} \right) = 0$ .

Pour  $(t_0, x_0) = (1, 1)$ ,  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{3-2t}}$ ,  $t \in ]-\infty, \frac{3}{2}[$ .

**Exercice**

Retrouver les solutions de l'équation scalaire  $x' = x^2$  du § 15-.

## 15.2.6 Résolution d'un problème de Cauchy-Peano

## 15.3 Propriétés d'une trajectoire ou d'une orbite

Comme on l'a vu précédemment, la solution d'un problème de Cauchy n'est pas nécessairement exprimable à l'aide de primitives des fonctions classiques, y compris dans le cas des champs linéaires non autonomes. Il est donc important d'obtenir des résultats portant sur des solutions non exprimées (ou non exprimables).

### 15.3.1 Durée de vie d'une trajectoire

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, la "durée de vie" d'une trajectoire maximale est la longueur de l'intervalle  $I_{(t_0, m_0)}$  de la solution maximale.

**Proposition 15.20** (Théorème de "majoration a priori")

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ ,  $n \geq 1$ , un champ  $\mathcal{X} \in C^1(U, E)$ , et  $]a, b[, \varphi$  une trajectoire de  $\mathcal{X}$  (solution de l'équation  $x' = \mathcal{X}(t, x)$ ).

On suppose que  $b < +\infty$ , et qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le graphe  $\{(t, \varphi(t))\}$  de la restriction de  $\varphi$  à l'intervalle  $]b - \varepsilon, b[$  soit inclus dans un compact  $K \subset U$ .



Alors, il existe une trajectoire  $\psi$  de  $\mathcal{X}$  qui prolonge  $\varphi$  à un intervalle  $]a, c[$  avec  $c > b$ .

Démonstration

Soit  $M$  la borne supérieure de  $\|\mathcal{X}\|$  sur  $K$ . L'inégalité

$$\|\varphi(t) - \varphi(t')\| \leq M |t - t'|$$

sur  $]b - \varepsilon, b[$  montre que  $\varphi$  admet une limite  $l$  lorsque  $t$  tend vers  $b^-$ , de plus  $(b, l) \in K$ .

Autre argument : l'existence de  $l$  résulte aussi de ce que, pour  $t_0 \in ]b - \varepsilon, b[$ , on peut écrire sur  $[t_0, b[$ ,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(t, \varphi(t)) dt.$$

Sachant que pour tout segment  $J \subset ]b - \varepsilon, b[$ ,  $\int_J \|\mathcal{X}(t, \varphi(t))\| dt$  est majoré par  $M\varepsilon$ , l'intégrale (Prop. 12-) et donc  $\varphi$  admet une limite  $l$  lorsque  $t$  tend vers  $b^-$ , et par suite  $(b, l) \in K$ .

D'autre part, la donnée de Cauchy  $(b, l)$  admet une solution  $(]b - \alpha, b + \alpha[, \tilde{\varphi})$ .

Envisageons la fonction  $\psi$  définie sur  $]a, b + \alpha[$  par  $\psi(t) = \varphi(t)$  si  $t \in ]a, b[$  et  $\psi(t) = \tilde{\varphi}(t)$  si  $t \in [b, b + \alpha[$ .

$\psi$  est continue sur  $]a, b + \alpha[$ , dérivable sur  $]a, b[ \cup ]b, b + \alpha[$ , avec  $\psi'(t) = \mathcal{X}(t, \varphi(t))$  si  $t < b$  et  $\psi'(t) = \mathcal{X}(t, \tilde{\varphi}(t))$  si  $t > b$ , et  $\lim_{t \rightarrow b} \psi'(t)$  existe puisque la limite à gauche est  $\mathcal{X}(b, l)$  en raison de la continuité du champ, et la limite à droite est  $\mathcal{X}(b, \tilde{\varphi}(b)) = \mathcal{X}(b, l)$ . Le corollaire 11- montre que  $\psi$  est  $C^1$  sur  $]a, b + \alpha[$ , et  $\psi'(b) = \mathcal{X}(b, l) = \mathcal{X}(t, \psi(b))$ .

Il en résulte que  $\psi$  est une trajectoire de  $\mathcal{X}$  qui prolonge  $\varphi$ . ■

La proposition précédente concerne les courbes intégrales. Elle permet d'obtenir une propriété intéressante des orbites de solutions maximales lorsque  $U$  est de la forme  $I \times \Omega$ .

**Corollaire 15.21** Soit  $U = I \times \Omega$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $E$ , et  $\mathcal{X} \in C^1(U, E)$ .

Si  $(]a, b[, \varphi)$  est une solution maximale de l'équation différentielle  $x'(t) = \mathcal{X}(t, x(t))$  avec  $a$  et  $b$  finis, alors pour tout compact  $H \subset \Omega$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \in ]a, b[ \cap ]b - \varepsilon, b[$  tel que  $\varphi(t) \notin H$ .

En particulier, toute solution maximale d'un champ autonome  $\mathcal{X}$ ,  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega \subset E$ , dont l'orbite est contenue dans un compact  $H$  de  $\Omega$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ .

S'il existe un compact  $H \subset \Omega$  qui contient  $\varphi(]a, b[)$ , en prenant  $K = [a, b] \times H$ , on est en effet dans les conditions de la proposition, ce qui contredit la maximalité de la solution.

L'hypothèse à vérifier dans la proposition précédente porte sur le graphe  $\{(t, \varphi(t))\}$  d'une solution a priori inconnue. Il est plus commode d'utiliser une formulation qui se rapporte aux propriétés du champ.

**Proposition 15.22** Avec les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, supposons que  $U = \mathbb{R} \times E$  et que le champ  $\mathcal{X}$  est borné sur toute partie de  $U$ , de la forme  $[a, b] \times E$ . C'est le cas d'un champ borné, autonome ou non.

Alors, la solution maximale  $(I_{(t_0, m_0)}, \varphi_{(t_0, m_0)})$  d'un problème de Cauchy est définie sur  $I_{(t_0, m_0)} = \mathbb{R}$ , autrement dit, le champ  $\mathcal{X}$  est complet.

**Corollaire 15.23** *Si un champ autonome  $\mathcal{X}$ ,  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $E$ , admet une intégrale première  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h^{-1}(e)$  soit vide ou compact pour chaque  $e \in \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{X}$  est complet.*

Démonstration (exercice).

Rédiger une démonstration de la proposition en reprenant les arguments de la démonstration précédente.

**Exemple 15.15** *On envisage l'équation scalaire du premier ordre  $x' = \sin x$ , autrement dit  $\mathcal{X}(t, x) = \sin x$ .*

*le champ  $\mathcal{X}$  est donc complet. Les équilibres sont les constantes  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*L'orbite d'une trajectoire (maximale)  $(\mathbb{R}, \varphi)$  qui n'est pas d'équilibre est nécessairement un intervalle (image continue de  $\mathbb{R}$ ), inclus dans un intervalle  $]k\pi, (k+1)\pi[$ , les orbites d'un champ autonome étant disjointes.*

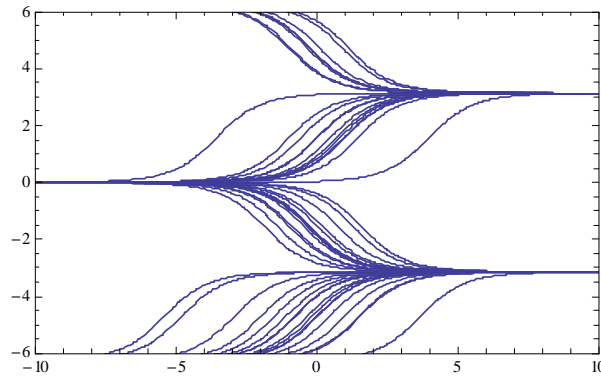
*De plus, la relation  $\varphi'(t) = \sin \varphi(t)$  montre que  $\varphi$  est strictement monotone; étant bornée, les limites de  $\varphi$  à l'infini existent. Mais il en est de même de  $\varphi'$ . L'égalité des accroissements finis  $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \varphi'(t_n)$ , avec  $n < t_n < n+1$  montre qu'il existe une suite réelle  $(t_n)$  qui tend vers  $+\infty$ , dont l'image par  $\varphi'$  tend vers 0, de sorte que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$ .*

*Il en résulte que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin \varphi(t) = 0$ , donc  $\sin(\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)) = 0$  et par suite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = (k+1)\pi$ .*

*De même,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi'(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = k\pi$ .*

*En conclusion, l'orbite de  $\varphi$  est égale à l'intervalle  $]k\pi, (k+1)\pi[$ .*

La figure c-iddessous représente quelques courbes intégrales.



### 15.3.2 Trajectoires périodiques des champs autonomes

La relation  $\varphi'(t) = \mathcal{X}(\varphi(t))$  montre que pour les trajectoires d'un champ autonome, on ne peut envisager une périodicité spatiale sans une périodicité des "vitesses". Cette contrainte a des conséquences importantes.

**Proposition 15.24** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $E$ , et  $\mathcal{X} \in C^1(\Omega, E)$ , les trajectoires maximales de  $\mathcal{X}$  sont simples ou périodiques.*

Démonstration

Supposons qu'une trajectoire maximale  $(I_{m_0}, \varphi_{m_0})$  ne soit pas un arc simple. Il existe un point  $m = \varphi_{m_0}(t_1) = \varphi_{m_0}(t_2)$ , pour  $t_1$  et  $t_2$  distincts, appartenant à  $I_{m_0}$ . Il en résulte que  $\varphi'_{m_0}(t_1) = \varphi'_{m_0}(t_2)$ .

La fonction définie par  $\psi(t) = \varphi_{m_0}(t + (t_1 - t_2))$  est une trajectoire de  $\mathcal{X}$ , définie sur l'intervalle translaté  $I_{m_0} - (t_1 - t_2)$ , et  $\psi(t_2) = m$ .

On a ainsi deux trajectoires  $(I_{m_0}, \varphi_{m_0})$ ,  $(I_{m_0} - (t_1 - t_2), \psi)$  satisfaisant à la même donnée de Cauchy  $(t_2, m)$ . Elles coïncident donc sur l'intersection  $I_{m_0} \cap (I_{m_0} - (t_1 - t_2))$ .

D'autre part, la trajectoire maximale  $\varphi_{(t_2, m)}$  pour la donnée de Cauchy  $(t_2, m)$  prolonge à la fois  $\varphi_{m_0}$  et  $\psi$ , elle est définie au moins sur la réunion  $I_{m_0} \cup (I_{m_0} - (t_1 - t_2))$ , et  $\varphi_{(t_2, m)}(0) = \varphi_{m_0}(0) = m_0$ .

Si  $I_{m_0} \neq \mathbb{R}$ , en échangeant  $(t_1 - t_2)$  en  $(t_2 - t_1)$  on contredit la maximalité de  $(I_{m_0}, \varphi_{m_0})$ .

Ce qui précède montre également que  $\varphi_{m_0}$  est périodique. ■

**Corollaire 15.25** *L'orbite d'une trajectoire maximale périodique d'un champ autonome est soit un point (équilibre), soit un arc  $C^1$  fermé simple donc difféomorphe à un cercle.*

Démonstration

Chaque réel  $c > 0$  tel que  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  pour tout réel  $t$ , est une période de  $\varphi$ . L'ensemble des périodes est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}^+$  (une limite d'une suite convergente de périodes est une période), or les sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}$  sont  $\mathbb{R}$  et les sous-groupes discrets (§ 9-). Il en résulte que, ou bien  $\varphi$  est constante (équilibre), ou bien l'ensemble des périodes est l'ensemble des multiples entiers de la plus petite période  $T$ , et la proposition montre qu'alors la restriction de  $\varphi$  à  $[0, T[$  est un arc simple.

La dernière affirmation est une conséquence évidente de la proposition 14-. ■

Une autre question est de savoir à l'inverse si, la trajectoire d'un champ autonome est périodique lorsque l'orbite d'un point est compacte. Plus généralement, il s'agit d'énoncer des propriétés des trajectoires à partir de propriétés des orbites.

Donnons deux résultats en soulignant que ceci est loin d'épuiser le sujet.

**Proposition 15.26** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $E$ ,  $\mathcal{X} \in C^1(\Omega, E)$ , et  $\Gamma$  une sous-variété de  $E$ , connexe, de dimension 1 et contenue dans  $\Omega$ .*

*On suppose que  $\Gamma$  contient l'orbite<sup>169</sup> de chacun de ses points.*

*Si  $\mathcal{X}$  ne s'annule pas sur  $\Gamma$ , alors pour tout  $m \in \Gamma$ , l'orbite de  $m$  est égale à  $\Gamma$ .*

*En particulier si  $\Gamma$  est compacte, la trajectoire est périodique (donc  $\Gamma$  est difféomorphe à un cercle d'après le corollaire précédent).*

Démonstration

Etant donné  $m_0 \in \Gamma$ , notons  $(I_{m_0}, \varphi_{m_0})$  la solution maximale du problème de Cauchy  $x' = \mathcal{X}(x)$  et  $x(0) = m_0$ .

Cette trajectoire est simple ou périodique. De plus, sachant que  $\varphi'_{m_0}$  ne s'annule pas par hypothèse, si  $\varphi_{m_0}$  est injective, c'est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I_{m_0}$  sur l'orbite  $\mathcal{O}_{m_0} = \varphi_{m_0}(I_{m_0})$  qui est contenue dans  $\Gamma$  (sinon, ce n'est qu'un difféomorphisme local).

Mais, dans tous les cas,  $\mathcal{O}_{m_0} = \Gamma$ . En effet, sur  $\Gamma$ , pour la relation d'équivalence  $y \sim x$  si  $y \in \mathcal{O}_x$ , la classe  $\mathcal{O}_x$  d'un point  $x$  est ouverte d'après ce qui précède, et fermée car le complémentaire de  $\mathcal{O}_x$  est une réunion de classes. La connexité de  $\Gamma$  donne la conclusion.

Si  $\Gamma$  est compacte, la trajectoire  $\varphi$  est nécessairement périodique car, dans le cas contraire, c'est un arc simple défini sur  $\mathbb{R}$  (puisque l'orbite est contenue dans un compact de

<sup>169</sup> Sous entendu : orbite de trajectoire maximale.

$\Omega$ ), donc une bijection  $C^1$  de  $\Gamma$  sur  $\Gamma$  dont la dérivée ne s'annule pas, et par suite  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur un compact, ce qui est impossible. ■

Le résultat suivant est d'utilisation plus commode, mais sa démonstration est moins élémentaire.

**Proposition 15.27** *Si l'orbite d'une solution d'un problème de Cauchy autonome est compacte, la trajectoire associée est périodique.*

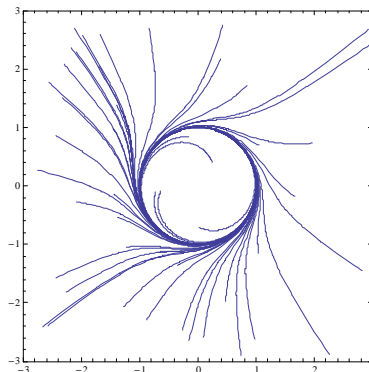
Démonstration

**Exemple 15.16**  $E = \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{X}(m) = (p, -\sin q)$  si  $m = (q, p)$ . Cela correspond à l'équation d'un pendule ponctuel  $\frac{d^2q}{dt^2} = -\sin q$  (Cf. § 16- ), où  $q$  est l'angle avec la verticale descendante et  $p = \frac{dq}{dt}$  la vitesse angulaire, sous l'action de la pesanteur, en supposant la masse égale à 1.

On pose  $H(q, p) = \frac{p^2}{2} - \cos q$  (quelle est la signification physique de  $H$  ?). En dérivant la fonction composée  $t \mapsto H(q(t), p(t))$ , vérifier que chaque orbite est contenue dans un ensemble de niveau de  $H$ , c'est à dire  $H(q, p) = c$ , la constante  $c$  étant déterminée par les conditions initiales  $q(0), p(0)$ .

En déduire que sur chaque trajectoire,  $\mathcal{X}$  reste bornée, et donc que les solutions maximales sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

### 15.3.3 Ensembles limites



## 15.4 Flot

## 15.5 Points critiques

## **15.6 Travaux dirigés**

