Chapitre 12
Intégration, une introduction (P. Aimé, 02/2014)

12.1 Introduction

En théorie de la mesure, un premier choix consiste à savoir si l'on veut commencer par mesurer des fonctions ou des ensembles. Il ne s'agit que d'un choix pédagogique, ces deux voies sont en réalité équivalentes. Ici, l'approche fonctionnelle est privilégiée, en raison des applications envisagées.

Un deuxième choix est celui du degré de généralité de la théorie. Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur un segment de $\mathbb{R}$. Les probabilistes ont besoin d'une théorie très générale, dont la version fonctionnelle est l'intégrale dite de Daniell, où les fonctions sont définies sur un ensemble quelconque. En géométrie différentielle (autrement dit, sur les “variétés”), les fonctions sont définies sur un espace métrique localement compact, réunion dénombrable de compacts, ce qui permet d'appliquer rapidement la théorie, aussi bien à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ que la mesure canonique d'une nappe paramétrée, et sans modification, aux surfaces et autres variétés envisagées pour la mécanique et l'électromagnétisme. Ceci sera développé au chapitre 20.

Ces distinctions assez grossières doivent être affinées par un critère topologique dont l'origine se situe dans un problème pratique. Le point de départ dans ce chapitre est l'intégrale des fonctions en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$. Cette intégrale est une forme linéaire croissante. Dans le chapitre 20, ce sera plus généralement une forme linéaire croissante sur l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur un espace métrique localement compact, réunion dénombrable de compacts.

Dans les deux cas, l'espace de départ s'avère trop “petit”, qu'il s'agisse de mesurer des aires ou des volumes, de la masse en mécanique, de la charge en électromagnétisme ou de la théorie du signal. L'idée est de prolonger les espaces de fonctions à mesurer et la mesure, en utilisant le principe de prolongement par continuité que l'on peut shématiser par

$$\text{mes}\,(\lim f_n) = \lim_n\,(\text{mes}\,(f_n))\,.$$

Pour $\lim_n\,(\text{mes}\,(f_n))$, la topologie est celle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Par contre, pour mes$(\lim f_n)$, l'espace fonctionnel étant de dimension infinie, il est nécessaire de préciser la topologie. C'est dans ce choix (qui sera un choix de norme) qu'il faut trouver la séparation entre les chapitres 12 et 20. Dans ce chapitre, nous prendrons la norme de convergence uniforme.

Jusqu'où prolonger ainsi ? La réponse se formule en terme de complétion. Il sagit de construire le complété de l'espace initial. C'est avec le complété que l'on obtient les théorèmes de convergence les plus efficaces relativement à une norme donnée.

Pour le lecteur qui recherche une trace de ce qu'il aurait appris sur l'intégrale de Riemann, précisons qu'elle n'apparaît pas dans ce chapitre, mais seulement au chapitre 20. La raison est que l'espace des fonctions Riemann-intégrables est effectivement complet pour la norme de convergence uniforme, mais il contient le complété des fonctions en escalier envisagé ici. Cet espace est donc inutilement trop “gros” pour les propriétés issues de la convergence uniforme et trop “petit” pour les propriétés relevant de la convergence en moyenne, on verra en effet qu'il n'est pas complet pour cette semi-norme. Il n'est donc pas essentiel.

Ce fil conducteur fournit une justification simple aux développements de ces deux chapitres. Il n'est pas fréquemment mis en évidence dès le départ, et les amateurs ce calculs de limites, de primitives plus ou moins sophistiquées, d'intégrale de Riemann devront fournir un effort pour “désapprendre”, effort dont seront dispensés les lecteurs disposant d'un regard neuf sur l'intégration. Evidemment, les techniques classiques d'intégration seront récupérées au passage.

On pourrait dire que ce chapitre est au niveau L1/L2, que le chapitre 20 est au niveau L2 si l'on admet les résultats dont la démonstration est un peu subtile, et L3 si l'on inclus toutes les démonstrations.

Rappelons que, pour toute partie A d'un ensemble X, la **fonction indicatrice** de A (dans X) est la fonction $\chi_A : X \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \in X \backslash A$.

Si $A \subset \mathbb{R}$, il convient de ne pas confondre la fonction définie sur A par la constante 1, qui est continue, et la fonction caractéristique χ_A, définie sur $\mathbb{R}$. la frontière de A, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points de discontinuité de χ_A.

12.2 Les fonctions en escalier

12.2.1 Vocabulaire

Définition 12.1 *Dans $\mathbb{R}$, une* ***subdivision*** *d'un segment $I = [a, b]$ non réduit à un point est la donnée d'une liste $\sigma = (a_0 = a, ..., a_p = b)$, avec $a_0 < .. < a_i < .. < a_p$.*

Les ***cellules*** *de σ sont les intervalles ouverts de la forme $]a_{i-1}, a_i[$, $1 \leq i \leq p$.*

Une subdivision est ***régulière*** *si toutes les cellules sont de même longueur. On écrira par exemple*

$$a_i = a + i\,\frac{b-a}{p},\ \ i = 0, ..., p.$$

Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est ***en escalier*** *sur I s'il existe une subdivision σ de I telle que les restrictions de φ à chaque cellule de σ sont constantes.*

Les images des extrémités des cellules ne sont pas précisées en général, cette donnée n'intervenant pas dans l'intégration.

Exercice

Décrire un procédé conduisant à exprimer la somme de deux fonctions en escalier φ et ψ définies sur le même intervalle I.

L'addition des fonctions en escalier conduit ainsi à modifier les points d'une subdivision donnée, en conservant des constantes. Pour cela, il est commode de compléter les définitions précédentes.

Définition 12.2 *Toute subdivision de I telle que φ soit constante sur chaque cellule est dite **adaptée** à φ.*

*Une subdivision σ' de I est **plus fine** que σ si les éléments de la suite σ sont des éléments de la suite σ'.*

Remarque 12.1 *Si une fonction φ est en escalier pour une subdivision σ de I, toute subdivision plus fine σ' est adaptée à φ.*

On notera $\mathcal{E}(I)$ (resp. $\mathcal{E}_+(I)$) l'ensemble des fonctions en escalier (resp. en escalier positives) sur I, et, pour une fonction f donnée sur I, $\mathcal{E}(I, f, -)$ l'ensemble des fonctions en escalier φ sur I telles que $\varphi \leq f$, $\mathcal{E}(I, f, +)$ l'ensemble des fonctions en escalier ψ sur I telles que $f \leq \psi$, $\mathcal{E}(I)$ est un sous-espace vectoriel réel de l'espace $\mathcal{B}(I)$ des fonctions bornées sur I.

12.2.2 Intégrale

La mesure est choisie pour que l'intégrale d'une fonction constante c sur un segment $I = [a, b]$ représente au signe près l'aire du rectangle de longueur $(b - a)$, de hauteur $|c|$, le signe de l'intégrale étant celui de c.

Proposition 12.1 *Soit φ une fonction en escalier sur un segment I de $\mathbb{R}$, et σ une subdivision adaptée. Notons $(c_1, .., c_p)$ la suite des valeurs de φ sur chacune de ces cellules.*

Alors, le réel $\sum_{i=1}^{p} c_i (a_i - a_{i-1})$ est indépendant du choix de la subdivision adaptée à φ, on le note[1] $\int_I \varphi$.

Démonstration

Notons $\int_{I,\sigma} \varphi = \sum_{i=1}^{p} c_i (a_i - a_{i-1})$, et prenons deux subdivisions σ,σ' adaptées à φ, avec σ' plus fine que σ.

Etape 1. Soit x un point de σ' qui n'appartient pas à σ, et σ_1 la subdivision obtenue en ajoutant le point x à σ. Alors, $\int_{I,\sigma} \varphi = \int_{I,\sigma_1} \varphi$. En effet, c'est évident si x est une extrémité d'une cellule de σ. Sinon, x est intérieur à une cellule (unique) $]a_{i-1}, a_i[$ de σ, et l'on est ramené à vérifier que $c_i (a_i - a_{i-1}) = c_i (a - a_{i-1}) + c_i (a_i - a)$, ce qui est clair.

Une itération finie du raisonnement conduit à l'égalité $\int_{I,\sigma} \varphi = \int_{I,\sigma'} \varphi$.

Etape 2. Pour deux subdivisions σ,σ' adaptées à φ, le résultat est obtenu en appliquant l'étape 1 avec la subdivision dont les points sont la réunion des points de σ et de σ'. ■

Définition 12.3 *$\int_I \varphi$ est l'**intégrale** de la fonction en escalier φ.*

*Pour tout segment $K = [\alpha, \beta] \subset I$, le réel[2] $\int_I \chi_K = \beta - \alpha$ est appelé **longueur** de I.*

---

[1] Les notations classiques $\int_I f(x)dx$ ou $\int_a^b f(x)dx$ seront utilisées, mais on verra qu'elles se rapportent à un autre concept (intégrale d'une forme différentielle sur un arc) qui se trouve équivalent à celui que l'on vient de définir si l'arc est un segment.

[2] En toute rigueur, on intègre la restriction à I de la fonction caractéristique χ_K.

On voit que si l'intégrale d'une fonction en escalier est nulle, celle-ci n'est pas nécessairement nulle, y compris pour les fonctions en escalier positives, sachant que $\int_I \varphi$ ne dépend pas des valeurs prises par φ aux bornes des cellules.

La proposition qui suit résume les propriétés utiles de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 12.2 *a) Si $I = [a, b]$ et $c \in]a, b[$, alors pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}(I)$, on peut écrire*

$$\int_I \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi.$$

b) Sur $\mathcal{E}(I)$, l'application $\varphi \longmapsto \int_I \varphi$ est une forme linéaire positive (ou croissante), et donc $\left|\int_I \varphi\right| \leq \int_I |\varphi|$. En particulier, $\left|\int_I \varphi\right| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$, ce qui prouve que la forme linéaire $\int_I$ est continue sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}(I)$ de l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I), \|\|_\infty)$ des fonctions bornées, muni de la norme de convergence uniforme.

Démonstration

a) Il suffit de considérer une subdivision adaptée à φ et contenant le point c. L'égalité obtenue comporte évidemment un abus d'écriture, il s'agit d'intégrer les restrictions de φ chacun des segments envisagés.

b) La linéarité, pour une combinaison linéaire $\alpha\varphi + \beta\psi$ de fonctions en escalier sur I, s'obtient en prenant la réunion des points de subdivision, ce qui donne une subdivision adaptée à la fois à $\alpha\varphi$, à $\beta\psi$ et à $\alpha\varphi + \beta\psi$.

Si $\varphi \geq 0$, il est clair que $\int_I \varphi \geq 0$ (on observe qu'il n'est pas question d'écrire des inégalités strictes, et que la réciproque est fausse). Par linéarité, on a donc $\int_I \psi \geq \int_I \varphi$ lorsque $\psi \geq \varphi$.

De l'encadrement $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$ on déduit $-\int_I |\varphi| \leq \int_I \varphi \leq \int_I |\varphi|$ et donc $\left|\int_I \varphi\right| \leq \int_I |\varphi|$, sachant que $\int_I |\varphi| \geq 0$.

Il en résulte que $\left|\int_I \varphi\right| \leq (b-a)\,M$ pour n'importe quel majorant M de $|\varphi|$ sur I, et en particulier $\left|\int_I \varphi\right| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$.

Si une suite (φ_n)de fonctions en escalier sur I converge uniformément vers une fonction en escalier φ, c'est à dire si $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty$ tend vers 0, alors $\left|\int_I (\varphi_n - \varphi)\right| = \left|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi\right|$ tend vers 0. ■

12.3 Complétion uniforme

12.3.1 Les fonctions réglées

D'après la proposition précédente, la propriété

$$\lim_n \left(\int_I f_n\right) = \int_I (\lim f_n\ )$$

est vérifiée dans l'espace $\mathcal{E}(I)$, pour les fonctions en escalier limites uniformes de suites de fonctions en escalier.

Ceci ne présente pas d'intérêt si l'on reste dans l'espace $\mathcal{E}(I)$, mais l'ensemble des limites uniformes de suites de fonctions en escalier est bien plus vaste, ce qui suggère le prolongement qui va suivre.

Définition 12.4 *Le complété du sous-espace des fonctions en escalier dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I), \|\|_\infty)$ est appelé l'espace des **fonctions réglées** de I dans $\mathbb{R}$, notons-le $\mathcal{R}(I)$.*

Rappelons que I est un segment.

Une fonction réglée sur I est donc une application $f : I \to \mathbb{R}$, caractérisée par l'une des propriétés équivalentes suivantes.

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}(I),\ \ |f - \varphi| \leq \varepsilon.$

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}(I),\ \ \|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$

3) Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur I qui converge uniformément vers f.

Proposition 12.3 *Le produit de deux fonctions réglées sur I est une fonction réglée sur I.*

La démonstration est conséquence de la décomposition (à connaitre)

$$f\, g - \varphi\, \psi = (f - \varphi)\, g + \varphi\, (g - \psi)$$

qui donne

$$\|f\, g - \varphi\, \psi\|_\infty \leq \|f - \varphi\|_\infty\, \|g\|_\infty + \|g - \psi\|_\infty\, \|\varphi\|_\infty\, .$$

Donnons une caractérisation commode des fonctions réglées.

Proposition 12.4 *Si $I = [a, b]$ est un segment, une application $f : I \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point x de $[a, b[$ une limite à droite $f(x^+)$, et en tout point x de $]a, b]$ une limite à gauche $f(x^-)$.*

En particulier, toute fonction continue ou continue par morceaux est réglée[3].

Démonstration

1) Si f est réglée sur le segment I, alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions dont chacune admet en tout point de $[a, b[$ une limite à gauche, et en tout point de $]a, b]$ une limite à droite. Il en est de même pour f en raison du théorème de la double limite (Prop. 9-).

2) Donnons une démonstration directe de la réciproque pour les fonctions continues.

Une fonction f, définie et continue sur un segment I, est uniformément continue sur I, elle vérifie donc la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \ \|x - y\| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ayant fixé ε, on prend une subdivision σ de I dont les cellules ont toutes une longueur inférieure à $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$, un point t_i dans chaque cellule σ_i, et la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = f(t_i)$ si x appartient à l'intérieur de la cellule σ_i, et $\varphi(x) = f(x)$ si x n'est intérieur à aucune cellule.

Alors, $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ et $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

3) Généralisons cette démonstration, en remplaçant l'argument d'uniforme continuité par un argument de compacité. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in\,]a, b[$ fixés, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(t) - f(x^\pm)| < \varepsilon$ pour $t \in\,]x, x + \alpha[$ ou $t \in\,]x - \alpha, x[$. On traite facilement les cas $x = a$ ou $x = b$. Au total, on obtient en faisant varier x, un recouvrement ouvert de I dont on extrait un recouvrement fini, tel que sur chaque demi-intervalle, la distance des images $|f(t) - f(t')|$ de deux points quelconques soit majorée par ε.

L'ensemble (fini) des extrémités et des centres de ces intervalles définit une subdivision de I, un choix arbitraire d'un point dans chaque cellule, et son image par f, définit une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ pour laquelle $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$. ■

[3] Rappelons que f est continue par morceaux sur $I = [a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0 = a, ..., a_p = b)$ telle que f soit continue sur chaque cellule de σ, et que f admette une limite à droite en $a_0, .., a_{p-1}$ et une limite à gauche en $a_1, .., a_p$.

Corollaire 12.5 *Toute fonction réelle monotone sur un segment est réglée.*

Proposition 12.6 *Une fonction réglée $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ admet un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.*

Démonstration

Ecrivons f comme limite uniforme d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur I. La réunion des points de discontinuité D_n de chaque φ_n est une réunion dénombrable de parties finies de I, c'est une partie finie ou infinie dénombrable en dehors de laquelle f est continue comme limite uniforme de fonctions continues (Prop. -). ■

Remarque 12.2 *La réciproque de cette proposition est fausse. Ainsi, une fonction telle que* $\sin \frac{1}{x}$ *sur* $]0, 1]$*, prolongée arbitrairement en* 0*, n'est pas réglée (elle n'admet pas de limite à droite en* 0 *quel que soit le prolongement).*

12.3.2 Intégration des fonctions réglées

Rappelons que I est un segment $[a, b]$.

En tant qu'application linéaire continue, et donc uniformément continue, l'intégrale admet, un prolongement unique au complété du sous-espace des fonctions en escalier dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I), \|\|_\infty)$ (Prop. 9-).

Suivant la proposition 9- , le prolongement de $\int_I$ est une forme linéaire continue, encore notée $\int_I$, et définie par

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$$

où (φ_n) est une suite de fonctions en escalier sur I, qui converge uniformément vers f .
Rappelons que cette limite ne dépend pas du choix de la suite (φ_n), ce qui est essentiel pour que $\int_I f$ ait un sens.

Donnons une démonstration directe de cette propriété.

Si (φ_n) *et* (ψ_n) *sont deux suites de fonctions en escalier sur* I*, qui convergent uniformément vers* f*, alors* $\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n$ *existent et sont égales.*

f étant donnée, on pose $\varepsilon(n) = \frac{1}{n\,(b-a)}$. Il en résulte une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur P telles que $\|f - \varphi_n\|_\infty \le \varepsilon(n)$.

Notons θ_n la fonction constante sur I, égale à $\varepsilon(n)$. Par suite, $\left\|\varphi_p - \varphi_q\right\|_\infty \le \theta_p + \theta_q$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, et p, q entiers tels que $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_I \varphi_p - \int_I \varphi_q\right| &= \left|\int_I (\varphi_p - \varphi_q)\right| \\
&\le \int_I \left\|\varphi_p - \varphi_q\right\|_\infty \\
&\le \int_I \theta_p + \theta_q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

La suite réelle $\left(\int_I \varphi_n\right)$ est de Cauchy, d'où l'existence de la limite.

L'unicité de cette limite résulte des majorations suivantes.

$$\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \psi_n\|_\infty \leq 2\theta_n$$

$$\begin{aligned}\left|\int_I \varphi_n - \int_I \psi_n\right| &= \left|\int_I (\varphi_n - \psi_n)\right| \\ &\leq \int_I \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \\ &\leq 2\int_I \theta_n = \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

■

Définition 12.5 *Le réel $\int_I f$ est appelé **intégrale** de la fonction réglée f, et $\frac{\int_I f}{b-a}$ est la **valeur moyenne** de f sur I.*

L'intérêt du prolongement ainsi réalisé est dans la conservation des propriétés de l'intégrale.

Proposition 12.7 *Sur $\mathcal{R}(I)$, l'application $f \longmapsto \int_I f$ est une forme linéaire positive (ou croissante), et donc $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$. En particulier, $\left|\int_I f\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$, ce qui confirme la continuité de cette forme linéaire sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{R}(I)$, complété de $\mathcal{E}(I)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I), \|\|_\infty)$.*

Corollaire 12.8 *Si $f \in \mathcal{R}(I)$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{[a,x]} f$ est continue.*

Avant de poursuivre, complétons les notations. Si $I = [a, b]$, ce qui sous-entend $a < b$, alors $\int_I f$ est aussi noté $\int_a^b f$. Ceci se prolonge évidemment au cas $a = b$, l'intégrale est alors nulle. Jusqu'ici, la notation $\int_x^y f$ avec $y < x$ n'a donc pas de sens.

Pour $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$, il est commode de donner un sens à l'expression $\int_x^y f$ dans tous les cas. Si $x < y$, $\int_x^y f = \int_{[x,y]} f$, si $x = y$, $\int_x^x f = 0$, si $x > y$, $\int_x^y f = -\int_y^x f$.

Il en résulte que pour tout point $z \in [a, b]$,

$$\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f.$$

En résumé, on a obtenu les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(I) & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & \mathcal{R}(I) & \longrightarrow & \mathcal{B}(I) \\ & \nearrow & & & \\ C^0(I) & & & & \end{array}$$

Pour la norme de convergence uniforme, $\mathcal{E}(I)$ admet $\mathcal{R}(I)$ comme complété, donc $\mathcal{E}(I)$ est dense dans $\mathcal{R}(I)$ et à part $\mathcal{E}(I)$ tous ces espaces sont complets.

12.3.3 Intégration des fonctions continues

Dans le cas particulier des fonctions continues sur un segment, un phénomène remarquable est la relation entre intégration et dérivation.

Proposition 12.9 *Si $I = [a, b]$ est un segment, pour toute fonction* ***continue*** *$f : I \to \mathbb{R}$, et pour tout point $c \in [a, b]$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ est une primitive de f.*

Démonstration

Ceci ne dépend pas du choix de c, sachant que $\int_c^x f = -\int_{[a,c]} f + \int_a^x f$.

Prenons $c = a$ et $x \in I$. Si δx est un réel non nul tel que $x + \delta x \in I$.

Si $\delta x > 0$,

$$\left|\frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} - f(x)\right| = \frac{1}{\delta x}\left|\int_x^{x+\delta x} (f(t) - f(x))\, dt\right| \leq \frac{1}{\delta x}\int_x^{x+\delta x} |f(t) - f(x)|\, dt.$$

Si $\delta x < 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} - f(x)\right| &= \frac{1}{|\delta x|}\left|\int_x^{x+\delta x} (f(t) - f(x))\, dt\right| \\ &= \frac{1}{|\delta x|}\left|\int_{x+\delta x}^{x} (f(t) - f(x))\, dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|\delta x|}\int_{x+\delta x}^{x} |(f(t) - f(x))|\, dt\end{aligned}$$

La continuité de f au point x donne aussitôt la conclusion. ■

Corollaire 12.10 *Si $F \in C^1(I = [a, b], \mathbb{R})$, alors $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.*

Remarque 12.3 $\frac{d}{dx}\left(\int_x^c f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_c^x f(t)dt\right) = -f(x)$.

Il n'y a pas que les fonctions continues qui ont des primitives. Par exemple, la fonction $F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongée par $F(0) = 0$ admet une fonction dérivée non continue à l'origine.

Dans l'exemple précédent, si $x \neq 0$, $f(x) = F'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

Il ne faut pas en déduire de relation simple entre l'existence de primitives et le type de discontinuité. Ainsi, une fonction en escalier n'admet pas de primitive (car les fonctions dérivées satisfont la propriété des valeurs intermédiaires).

En outre, pour les fonctions qui admettent des primitives, la relation entre primitive et intégrale n'est pas simple en dehors du cas des fonctions continues.

Enfin, il ne faut pas déduire de la proposition précédente que toute intégrale de fonction continue s'évalue en pratique à l'aide d'une primitive. Une telle primitive n'est pas nécessairement exprimable à l'aide de fonctions d'expression connue. C'est le cas par exemple pour $\int_a^x \frac{\sin t}{t}dt$.

En fin de chapitre, un tableau récapitule les primitives usuelles.

Une primitive étant définie à une constante additive près, la notation $\int f$ sans préciser les bornes, est usuelle. Il convient de revenir à une écriture plus précise en cas de doute.

Par exemple, si $x > 1$, $\int_{[1,x]} \frac{1}{t}dt = \ln x$, si $0 < x < 1$, $\int_{[x,1]} \frac{1}{t}dt = \ln x$, mais on a aussi, pour $x < 0$, $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$, d'où $\int_{[-1,x]} \frac{1}{t}dt = \ln(-x)$ et $\int_{[x,-1]} \frac{1}{t}dt = \ln(-x)$. L'écriture (abusive mais simple) $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ contient tous ces cas particuliers, elle signifie $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ en tout point où $\ln|x|$ est définie.

Corollaire 12.11 ***(Intégration par parties)***

Si f, g sont deux fonctions réelles C^1 sur un segment $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f'(t)\ g(t)\,dt = [f(t)\ g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\ g'(t)\,dt$$

L'intégration par parties est principalement utilisée pour intégrer des produits de fonctions lorsque cela permet de se ramener à des primitives connues, mais pas seulement, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 12.1 *Avec $f(t) = t$ et $g(t) = \ln t$, $\int \ln t = t\ln t - t$.*

Exercice

Il s'agit de prouver que π **est irrationnel**.

Pour des entiers naturels a, b, n non nuls, on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$$

Déduire des variations de P_n que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a/b} P_n(t)\ \sin t\,dt = 0$$

Si $\pi = \frac{a}{b}$, démontrer que l'intégrale ci-dessus a une valeur entière (faire des intégrations par parties successives), et conclure.

Corollaire 12.12 *(Formule de **Taylor** avec **reste intégral**)*

Si f est une fonction réelle C^∞ sur un segment I, alors pour tout entier $n \geq 1$, et pour deux points a, x de I,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Démonstration (par récurrence sur n).

La démonstration est rédigée pour $a < x$, le cas $x < a$ s'en déduit.

La formule peut être prolongée à $n = 0$, en écrivant $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, ce qui permet une récurrence à partir de $n = 0$.

Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang $(n-1)$ pour un entier $n \geq 1$, en particulier si $n > 1$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt.$$

Alors, une intégration par parties avec les fonctions

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ et } v(t) = f^{(n)}(t)$$

donne

$$u(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} \text{ et } v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

et

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

On adaptera facilement le raisonnement si l'on part de $n = 1$. ■

Comme annoncé au chapitre précédent, cette expression intégrale du reste est intéressante pour étudier la convergence de la série de Taylor d'une fonction C^∞ en un point a, vers la fonction f donnée. Cette série de Taylor est la série entière de terme général $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

Commençons par un exemple usuel qui généralise les développements de $\frac{1}{1 \pm x}$ donnés précédemment.

Exemple 12.2 *Pour α réel, la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$, qui est C^∞ sur $]-1, +\infty[$, est développable en série entière à l'origine ($a = 0$) avec intervalle de convergence $]-1, 1[$. Le développement est*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Vérifions cette propriété en majorant $R_n(x) = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right|$ sur $]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n (1+t)^{\alpha-1}\, dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n)}{n!} x^n \right| \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\, dt \right|. \end{aligned}$$

Cette inégalité s'obtient en majorant la valeur absolue de la fonction $t \longmapsto \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n$ par la constante $|x|^n$ sur l'intervalle d'intégration.

En posant $u_n = \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n)}{n!} x^n$, on remarque que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < |x|$, d'où l'on déduit le résultat.

La formule de Taylor avec reste intégral permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante de développabilité qui approfondit le lien entre la développabilité et l'existence des dérivées à tout ordre.

Proposition 12.13 *Soit f une fonction réelle C^∞ sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$.*

1) On suppose qu'il existe $M \geq 0$ et $\rho > 0$ tels que $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{M\, n!}{\rho^n}$ pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$ où $r = \min(\alpha, \rho)$.

Le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est donc au moins égal à r.

2) Inversement, supposons que f est développable en série entière au point a, avec un rayon de convergence $R > 0$.

Alors, pour tout $\alpha \in]0, R[$, il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ tels que $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{M\, n!}{\rho^n}$ pour tout entier n, sur l'intervalle $[a-\alpha, a+\alpha]$.

Démonstration

Pour simplifier l'écriture, prenons $a = 0$.

1) Sur le segment $[-\alpha, \alpha]$, on a $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leq \frac{M}{\rho^{n+1}} |x|^{n+1}$ et l'hypothèse $|x| < \rho$ donne la conclusion.

2) On fixe $\beta \in]\alpha, R[$. Il existe un réel $A > 0$ tel que la suite $(|a_n|\, \beta^n)$ soit bornée par A.

Il en résulte que pour tout entier p, sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|f^{(p)}(x)\right| &= \left|\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)..(n-p+1)\, a_n x^{n-p}\right| \\
&\leq \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)..(n-p+1)\,|a_n| \left|\frac{x}{\beta}\right|^{n-p} \beta^{n-p} \\
&\leq \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)..(n-p+1) \left|\frac{x}{\beta}\right|^{n-p} \frac{A}{\beta^p} \\
&\leq \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)..(n-p+1) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-p} \frac{A}{\beta^p} \\
&= \frac{A}{\beta^p} p! \sum_{n=p}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-p} \\
&= \frac{A}{\beta^p} p! \sum_{q=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{q} \\
&= \frac{A}{\beta^p} p! \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-p-1} \\
&= M\frac{p!}{(\beta-\alpha)^p} \text{ avec } M = \frac{A}{1-\frac{\alpha}{\beta}},
\end{aligned}$$

d'où la conclusion, avec $\rho = \beta - \alpha$.

■

Exercices

1) Si f est une fonction réelle C^∞ sur un intervalle $I =]a-\alpha, a+\alpha[$, et s'il existe $M \geq 0$ tel que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ sur I, alors f est développable en série entière en a.

2) Si f est une fonction réelle C^∞ sur un intervalle $I =]a-\alpha, a+\alpha[$, et si $f^{(n)}(x) \geq 0$ sur I, pour tout n, alors f est développable en série entière en a.

Indication : prendre $|x| < \rho$ avec $\rho > 0$ tel que $[-\rho, 2\rho] \subset I$.

Solution

2) Pour $|x| < \rho$, $f(x+\rho) - \frac{\rho^n f^{(n)}(x)}{n!}$ est une somme de ternes positifs, donc f étant croissante,

$$0 \leq \frac{\rho^n f^{(n)}(x)}{n!} \leq f(x+\rho) \leq f(2\rho) = M.$$

Une autre technique d'intégration, appelée changement de variables, consiste à remplacer la fonction $f(x)$ à intégrer par une fonction composée $f(\varphi(t))$, de sorte que la proposition ci-dessous conduise à un calcul plus facile. Il n'est donc pas toujours évident de trouver une telle fonction φ.

On notera que la "nouvelle variable t" est une pré-image de "l'ancienne x", et qu'il serait très maladroit de prendre la même notation pour la variable de f et la variable de φ.

$$\begin{array}{ccc}
t & \xrightarrow{\varphi} & x \\
& \searrow & \downarrow f \\
& & f(\varphi(t))
\end{array}$$

Proposition 12.14 ***(Théorème du changement de variable)***

Soit φ une fonction réelle C^1 sur un segment $[a,b]$, $\varphi([a,b])$ est donc un segment, mais ses extrémités ne sont pas nécessairement $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Si f est une fonction réelle continue sur l'intervalle $\varphi([a,b])$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\,dt.$$

Démonstration
Posons $G(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx$, et $F(u) = \int_{\varphi(a)}^{u} f(x)dx$, de sorte que $G = F \circ \varphi$.
Il en résulte que $G'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.
Finalement,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx &= G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b G'(t)dt\\ &= \int_a^b F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt\\ &= \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.\end{aligned}$$

■

Il est fréquent de choisir φ monotone donc bijective de $[a,b]$ sur $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ si φ est croissante, ou $[\varphi(b), \varphi(a)]$ si φ est décroissante, mais la démonstration montre que cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Remarquons que le choix $\varphi(t) = -t$ donne $\int_{-a}^{-b} f(x)dx = -\int_a^b f(-t)\ dt$, c'est à dire $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(-t)\ dt$ pour un segment $[\alpha,\beta]$.

Il en résulte que si f est une fonction paire, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(t)\ dt$, en particulier $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$

et si f est impaire, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_{-\beta}^{-\alpha} f(t)\ dt$ en particulier $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

Exercice
Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x\ln(x)+x}dx$.

Solution
Le changement de variable $x = \varphi(t) = e^t$ donne $\varphi(a) = 1$ donc $a = 0$ et $\varphi(b) = e$ donc $b = 1$, et

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x\ln(x)+x}dx &= \int_0^1 \frac{t}{te^t+e^t}e^t dt = \int_0^1 \frac{t}{t+1}dt\\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{-1}{t+1}\right)dt\\ &= [t - \ln(t+1)]_0^1 = 1 - \ln 2.\end{aligned}$$

12.3.4 Convergences et approximation de l'intégrale

12.3.4.1 Introduction

Pour les fonctions continues dont l'expression d'une primitive pose des problèmes théoriques ou pratiques, et pour les fonctions réglées non continues, il est essentiel de disposer de propriétés donnant des conditions suffisantes de convergence vers $\int_I f$ à partir d'une suite (φ_n) de fonctions réglées pour laquelle la suite $\left(\int_I \varphi_n\right)$ est connue. Le cas le plus élémentaire étant celui où les φ_n sont en escalier.

Les propriétés que l'on va obtenir proviendront de la complétude de l'espace normé $(\mathcal{R}(I), \|\|_\infty)$, ce qui justifie le rôle des fonctions réglées.

Distinguons deux types de procédés.

1) Si l'on ne sait pas à priori que la fonction f est réglée, ce qui se présente en général si l'on part d'une suite (φ_n) et non de f, il importe de pouvoir le déduire d'une hypothèse de convergence de (φ_n) vers f. La situation la plus simple est obtenue lorsque (φ_n) converge uniformément vers f, mais on peut obtenir que f est réglée et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$ sous des hypothèses plus faibles.

Ainsi, pour $I = [0,1]$, et $\varphi_n(x) = x^n$, les fonctions φ_n sont continues donc réglées, la fonction f, limite simple de (φ_n) est définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$, f est réglée mais discontinue en 1, la convergence n'est donc pas uniforme, et cependant

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_I f.$$

2) Si l'on sait au départ que f est une fonction réglée, il est intéressant de pouvoir conclure directement que $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$ sans passer par une étude préalable de la convergence (uniforme ou non) de (φ_n) vers f. Ce sera l'objet de la sous-section consacrée aux sommes de Riemann.

12.3.4.2 Convergence en moyenne

Les quelques réflexions précédentent conduisent à formaliser la convergence des suites d'intégrales.

Nous avons vu au § 9-1-2-2 que sur l'espace $C^0([a,b], \mathbb{R})$, l'application N_1 définie par $N_1(f) = \int_I |f|$ est une norme.

Rappelons aussi que sur cet espace, la norme $N_2(f) = \int_I f^2$ est une est euclidienne (exemple 3 -). Plus précisément, l'espace vectoriel $C^0([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur un intervalle non trivial $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un espace préhilbertien[4] pour la forme $\Omega(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

Sur $\mathcal{R}(I)$, l'application encore notée N_1, définie par la même relation, ne vérifie pas la définition d'une norme, la seule différence étant que la propriété

$$(N_1(f) = 0) \Longleftrightarrow (f = 0)$$

est remplacée par

$$(N_1(f) = 0) \Longleftarrow (f = 0)$$

étant entendu que les autres propriétés sont conservées. L'exemple ci-dessus de la fonction limite simple sur $[0,1]$ de x^n montre la nécessité d'étendre la notion de norme[5].

Comme pour la convergence simple, nous laisserons de côté la définition des ouverts associés à N_1 sur l'espace $\mathcal{R}(I)$, seule la convergence des suites sera précisée.

Définition 12.6 *Etant donné une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{R}(I)$, et un élément $f \in \mathcal{R}(I)$, la suite (f_n)* ***converge en moyenne*** *vers f si $\lim_{n\to\infty} N_1(f_n - f) = 0$.*

Si la suite (f_n) converge en moyenne vers f, la relation

$$\left| \int_I f_n - \int_I f \right| \leq N_1(f_n - f)$$

[4] L'étude de cette norme, qui relève des espaces de Hilbert, est proposée au chapitre 25.

[5] On parle alors de “semi-norme”, mais nous ne détaillerons pas la topologie associée.

permet de déduire la “permutation des limites” suivante

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Cette relation n’est pas équivalente à la convergence en moyenne. Ainsi, sur $[0, 2\pi]$, avec la suite constante $f_n(x) = \sin x$ et $f(x) = 0$, on a $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$, mais $N_1(f_n - f) = 4$.

La situation la plus simple est obtenue pour les suites uniformément convergentes de fonctions réglées.

Proposition 12.15 *Si une suite (f_n) d’éléments de $\mathcal{R}(I)$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{R}(I)$ et (f_n) converge en moyenne vers f.*

Démonstration

Aucun calcul n’est nécessaire. La complétude de l’espace normé $(\mathcal{R}(I), \|\|_\infty)$ assure que $f \in \mathcal{R}(I)$ (un espace complet est fermé), et l’inégalité $\left|\int_I (f - f_n)\right| \leq (\text{Long}(I)) \|f - f_n\|_\infty$ assure la convergence en moyenne. ■

En appliquant la proposition à la suite des sommes partielles d’une série de fonctions réglées, le résultat se traduit ainsi.

Corollaire 12.16 *Si une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ d’éléments de $\mathcal{R}(I)$ converge uniformément, sa somme S appartient à $\mathcal{R}(I)$ et $\sum f_n$ converge en moyenne vers S, c’est à dire*

$$\lim_{n\to\infty} N_1\left(\sum_{p=0}^{n} f_p - S\right) = 0.$$

Il en résulte que

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

En pratique, ce résultat est surtout utilisé dans le cas de la convergence normale (rappelons la proposition 9-48 : dans un espace normé complet, toute série normalement convergente est convergente, c’est à dire uniformément convergente dans l’espace $\mathcal{R}(I)$ qui nous intéresse ici).

Rappelons (Prop. 9-) que toute série entière réelle est normalement donc uniformément convergente sur tout segment inclus dans l’intervalle (ouvert) de convergence.

Enonçons le résultat obtenu, qui n’est qu’un cas particulier du corollaire précédent, en tenant compte de la propriété 11- qui assure que le rayon de convergence est conservé.

Corollaire 12.17 *Etant donné une série entière réelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ admet le même rayon de convergence et pour $|x| < R$, $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.*

Exemple 12.3 *Si* $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= -\ln(1-x), \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} &= \ln(1+x), \\
\textit{Arctan}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\
\textit{Argth}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Remarque 12.4 *La fonction somme de la série entière* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ *peut être prolongée en* $x = 1$ *par la valeur* $\ln 2$*. Ce prolongement est donc continu.*

En effet, pour $x \neq -1$, et tout entier n,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Après intègration de cette relation sur $[0,1]$, on obtient

$$\left| 1 - \frac{1}{2} + .. + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1},$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Nous savons maintenant que dans $\mathcal{R}(I)$, les propriétés de convergence simple, uniforme, et en moyenne, pour une suite de fonctions, sont liées par les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Convergence uniforme} & \Longrightarrow & \text{Convergence en moyenne} \\
\Downarrow & & \\
\text{Convergence simple} & &
\end{array}$$

Les exemples suivants montrent que ce sont les seules implications entre ces trois propriétés.

Exemple 12.4 *La convergence en moyenne n'entraine pas la convergence uniforme.*

Nous avons vu l'exemple de la suite (x^n) *sur* $[0,1]$*. Des exemples semblables tels que* $(\sin^n x)$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *ou* $\left(e^{-n \sin x}\right)$ *sur* $[0,\pi]$ *montrent l'utilité de disposer de théorèmes performants pour traiter la convergence en moyenne sans calculer de primitives. La question de savoir quelles sont les fonctions limites en moyenne de suites de fonctions en escalier sur un segment* I *reste ouverte pour ce chapitre. Ces questions seront traitées facilement dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue (Cf. Chap 20).*

Exemple 12.5 *La convergence en moyenne n'entraine pas la convergence simple, sauf pour les fonctions continues.*

Par exemple, définissons ainsi une suite de fonctions sur $[0,1]$.

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique $n = 2^k + m$ avec $0 \leq m < 2^k$. Plus précisément, k est le plus grand entier tel que 2^k soit majoré par n. Notons f_n la fonction caractéristique du segment $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]$, inclus dans $[0,1]$ pour tout n.

Alors, la suite $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)$ converge vers 0, mais pour tout $x \in [0,1]$, la suite $f_n(x)$ est divergente (elle prend la valeur 0 et la valeur 1 pour une infinité de valeurs de n.

Exemple 12.6 *La convergence simple n'entraine pas la convergence en moyenne.*

Par exemple, pour $n \geq 2$, posons

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -n^2 x + 2n \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

Les fonctions f_n sont continues donc réglées, convergent simplement vers la fonction nulle, mais $\int_0^1 f_n = 1$ pour tout n.

Exercice

Comparer les convergences simple, en moyenne et uniforme pour les exemples suivants.

I	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$
$f_n(x)$	$\frac{nx}{1+n^2x^2}$	$\frac{n^2x}{1+n^3x^2}$	$\sqrt{n}x^n$	nxe^{-nx^2}

12.3.4.3 Choix d'une suite d'approximation en escalier

En vue du calcul numérique approché des intégrales, et sous l'hypothèse $f \in \mathcal{R}(I)$, nous allons construire des suites de fonctions en escalier (φ_n) qui réalisent la propriété
$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$.

Définition 12.7 *Appelons **subdivision pointée** d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, la donnée d'une subdivision $\sigma = (a_0, .., a_n)$ de $[a,b]$, et d'une liste réelle $\xi = (y_1, .., y_n)$ telle que $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pour $i \in \{1, .., n\}$.*

Si f est une fonction définie sur $[a,b]$, notons respectivement

$$\varphi(f, \sigma, \xi)$$
$$\varphi(f, \sigma, +)$$
$$\varphi(f, \sigma, -)$$

- la fonction en escalier prenant les valeurs y_i sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$,
- la fonction en escalier prenant les valeurs $M_i = \sup_{x\in]a_{i-1},a_i[} f(x)$ sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$,
- la fonction en escalier prenant les valeurs $m_i = \inf_{x\in]a_{i-1},a_i[} f(x)$ sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$.

Définition 12.8 *Avec ces données, l'intégrale $\int_I \varphi(f, \sigma, \xi)$ de la fonction en escalier est appelée **somme de Riemann** de la fonction f, associée à la subdivision pointée (σ, ξ), $\int_I \varphi(f, \sigma, +)$ est la **somme de Darboux supérieure** de la fonction f, associée à la subdivision σ, et $\int_I \varphi(f, \sigma, -)$ est la **somme de Darboux inférieure** de la fonction f, associée à la subdivision σ.*

On a évidemment

$$\begin{aligned}\int_I \varphi(f,\sigma,\xi) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\, y_i,\\ \int_I \varphi(f,\sigma,+) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\, M_i,\\ \int_I \varphi(f,\sigma,-) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\, m_i.\end{aligned}$$

Proposition 12.18 *(Théorème de* ***Riemann-Darboux****) Soit $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a,b]$.*

1) Pour toute somme de Riemann, la limite de $\int_I \varphi(f,\sigma,\xi)$ existe lorsque le pas $\rho(\sigma)$ tend vers 0.

2) La limite de la somme de Darboux supérieure $\int_I \varphi(f,\sigma,+)$ existe lorsque le pas $\rho(\sigma)$ tend vers 0.

3) La limite de la somme de Darboux inférieure $\int_I \varphi(f,\sigma,-)$ existe lorsque le pas $\rho(\sigma)$ tend vers 0.

Et ces limites sont égales à $\int_I f$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que la propriété suivante soit vérifiée :

Pour toute subdivision pointée (σ,ξ) de pas $\rho(\sigma) < \alpha$,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) \right| \leq \varepsilon.$$

La formulation est analogue avec les sommes de Darboux.

Corollaire 12.19 *En prenant $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ (subdivision régulière), les sommes de Riemann correspondant aux choix suivants $y_i = a_{i-1}$, $y_i = a_i$, $y_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, notées respectivement*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a_{i-1}), \quad R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i), \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right),$$

convergent vers $\int_I f$, ainsi que la suite $(U_n) = \left(\frac{R_n+S_n}{2}\right)$.

Ceci permet de généraliser le corollaire 12-10.

Corollaire 12.20 *Si $F : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, et si $F' \in \mathcal{R}(I)$, alors $\int_I F' = F(b) - F(a)$.*

Démonstration

Prenons une subdivision régulière σ de I. Pour tout n, $\int_I F'$ est compris entre les sommes de Darboux $\int_I \varphi(F',\sigma,+)$ et $\int_I \varphi(F',\sigma,+)$.

D'autre part, $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(a_i) - f(a_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n F'(c_i)$ où $c_i \in]a_{i-1}, a_i[$ d'après l'égalité des accroissements finis.

Il en résulte que $F(b) - F(a)$ est compris entre les deux mêmes sommes de Darboux.

Ces sommes de Darboux ayant même limite selon n, on a l'égalité annoncée. ■

Définition 12.9 *L'utilisation des suites (S_n) ou (R_n) est la méthode dite des **rectangles** pour le calcul de $\int_a^b f$, l'utilisation des suites (T_n), et (U_n) est appelée respectivement méthode des **rectangles médians** et des **trapèzes**.*

Démonstration de la proposition

Le corollaire est évident, il suffit de démontrer la proposition.

Etape 1 Si f est la *fonction caractéristique* d'un segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, et (σ,ξ) une subdivision pointée de $[a,b]$, notons i_0 le plus grand indice i tel que $x_i \leq \alpha$, i_1 le plus petit indice i tel que $x_i \geq \beta$. Il est clair que $f(y_{i_0}) = 0$ ou 1, et $f(y_{i_1}) = 0$ ou 1. La somme de Riemann correspondante vérifie donc les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) &= (x_{i_0+1} - x_{i_0}) f(y_{i_0}) + \sum_{i_0+1}^{i_1-1} (x_{i+1} - x_i) + (x_{i_1+1} - x_{i_1}) f(y_{i_1}) \\
&\leq x_{i_1} - x_{i_0} \\
&= x_{i_1} - \beta + \beta - \alpha + \alpha - x_{i_0} \\
&\leq (\beta - \alpha) + 2\rho(\sigma),
\end{aligned}$$

autrement dit,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) \right| \leq 2\rho(\sigma).$$

Etape 2 Si f est une fonction *en escalier*, la propriété s'en déduit par linéarité de l'intégrale.

Etape 3 Si f est une fonction *réglée*, notons (φ_n) une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Pour toute subdivision pointée (σ,ξ) de $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) \right| \\
\leq\ &\left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \right| + \left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi(\varphi_n,\sigma,\xi) \right| + \left| \int_a^b \varphi(\varphi_n,\sigma,\xi) - \int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) \right|.
\end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon > 0$.

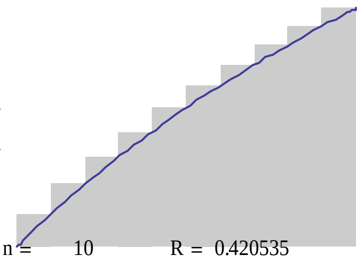
Il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que $\left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi_{n(\varepsilon)} \right| \leq (b-a) \left\| f - \varphi_{n(\varepsilon)} \right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

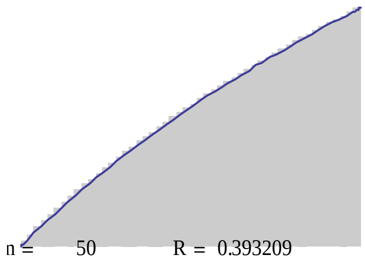
De même, $\left| \int_a^b \varphi\left(\varphi_{n(\varepsilon)},\sigma,\xi\right) - \int_a^b \varphi(f,\sigma,\xi) \right| \leq (b-a) \left\| f - \varphi_{n(\varepsilon)} \right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Enfin, $\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi(\varphi_n,\sigma,\xi) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour toute subdivision σ de pas assez petit (Etape 2).

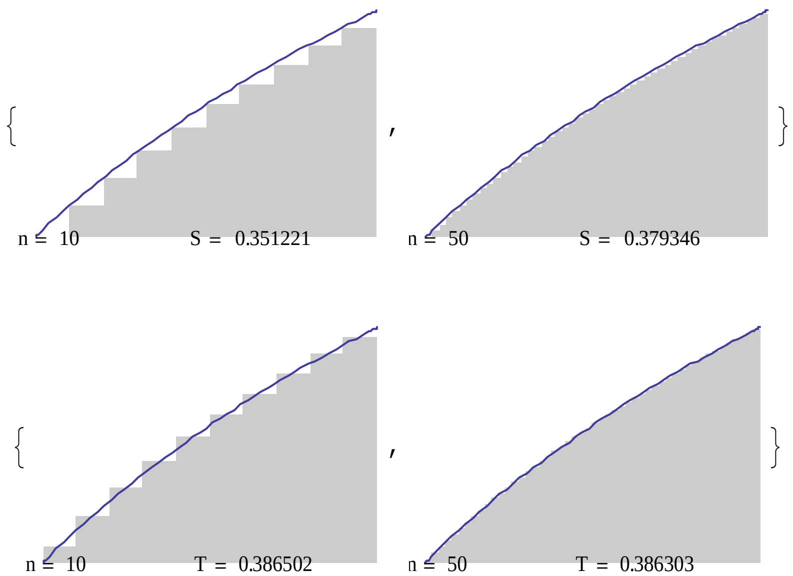
D'où la propriété pour les fonctions réglées. ■

Les figures ci-dessous illsutrent les sommes R_n, S_n, T_n pour l'intégrale $\int_1^2 \ln t \, dt$ dont une valeur approchée est $0.386\,294$ à 10^{-6} prés.

{ 

, 

}



Exercices

1) Donner l'expression des sommes de Riemann notées $R(n)$ pour la fonction $f(t) = \sin t$, sur le segment $[0, \pi]$.

En déduire la limite de la suite

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{n\pi}{n}\right).$$

2) Donner l'expression des sommes de Riemann notées $S(n)$ pour la fonction $f(t) = \sqrt{t}$, sur le segment $[0, 1]$.

En déduire la limite de la suite

$$v_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$$

3) Calculer la limite de la suite $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$ à l'aide d'une somme de Riemann d'une fonction que l'on précisera.

Solutions

1) $R(n) = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{n\pi}{n}\right) = \pi u_n$ donc la limite de u_n est $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin = \frac{2}{\pi}$.

2) $S(n) = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{0}{n}} + .. + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$.

3) $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}$ donc w_n est la suite $R(n)$ pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

la limite est $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$.

12.3.4.4 Formules de la moyenne

Si $I = [a, b]$, linégalité $\left|\int_I f\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ est vérifiée pour $f \in \mathcal{R}(I)$ comme on l'a vu, et peut être précisée par une égalité lorsque f est continue. Il s'agit de l'existence d'un point $c \in I$ tel que $\int_I f = f(c)\,(b-a)$, ce qui signifie que $\left|\int_I f\right|$ est égal à l'aire du rectangle de côtés $(b-a)$ et $|f(c)|$, ou encore que la valeur moyenne de f sur I est "atteinte" en un point (l'existence sera déduite du théorème des valeurs intermédiaires, nous n'aurons donc pas de procédé pour construire effectivement c lorsque a et b sont fixés).

Proposition 12.21 ***(Première formule de la moyenne)***
Soit $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$, avec $g \geq 0$. Alors,

$$\left(\inf_I f\right)\left(\int_I g\right) \leq \int_I f\ g \leq \left(\sup_I f\right)\left(\int_I g\right).$$

Si f est continue sur I, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_I f\ g = f(c)\int_I g.$$

La démonstration de la première relation est immédiate, l'encadrement $\inf_I f \leq f \leq \sup_I f$ donne en effet $(\inf_I f)\, g \leq fg \leq (\sup_I f)\, g$, et l'intégrale est une forme linéaire croissante.

Supposons maintenant f continue. Si $\int_I g = 0$, alors $\int_I f\ g = 0$ et la deuxième relation est immédiate. Sinon, le réel $\frac{1}{\int_I g}\int_I f\ g$ est compris entre les bornes de f, mais celles-ci sont atteintes et l'existence de c se déduit du théorème des valeurs intermédiaires (Prop. 9-).

Proposition 12.22 ***(Deuxième formule de la moyenne)***
Soit $f \in \mathcal{R}(I)$, $I = [a, b]$, $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone (donc réglée) sur I.
Alors, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_I f\ g = g(a)\int_{[a,c]} f + g(b)\int_{[c,b]} f.$$

Si g est positive décroissante (resp. croissante) sur I, on peut choisir c pour que

$$\int_I f\ g = g(a)\int_{[a,c]} f \quad \textit{(resp.} \quad \int_I f\ g = g(b)\int_{[c,b]} f\ \textit{).}$$

Démonstration
Etape 1 Posons $h(x) = g(x) - g(b)$, il vient

$$\begin{aligned}\int_I f\ h &= \left(\int_I f\ g\right) - g(b)\int_I f = \left(\int_I f\ g\right) - g(b)\int_{[a,c]} f - g(b)\int_{[c,b]} f\\ h(a)\int_{[a,c]} f &= g(a)\int_{[a,c]} f - g\,(b)\int_{[a,c]} f\end{aligned}$$

donc

$$\int_I f\ h = h(a)\int_{[a,c]} f \Longleftrightarrow \left(\int_I f\ g\right) = g(b)\int_{[c,b]} f + g(a)\int_{[a,c]} f.$$

Les deux relations sont équivalentes, on peut donc supposer que $g(b) = 0$ pour la démonstration, lorsque g est décroissante, et de même supposer que $g(a) = 0$ lorsque g est croissante.

Etape 2 La fonction F définie au corollaire - étant continue sur I, prouver l'existence de $c \in I$ tel que $\int_I f\ g = g(a)\int_{[a,c]} f$ équivaut à prouver l'encadrement

$$g(a)\ \inf_I F \leq \int_I f\ g \leq g(a)\ \sup_I F.$$

Etape 3 Démontrons la double inégalité précédente sous l'hypothèse $f \in \mathcal{E}(I)$, $g \in \mathcal{R}(I)$ positive décroissante.

Ecrivons

$$\int_I f\ g = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(F\left(a_i\right) - F\left(a_{i-1}\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} F\left(a_i\right)\left(y_i - y_{i+1}\right) + y_n F\left(b\right)$$

La liste $(y_1, .., y_n)$ étant décroissante positive, l'encadrement cherché se déduit aussitôt de $\inf_I F \leq F(a_i) \leq \sup_I F$, en supposant que $y_1 = g(a)$.

La fonction g n'ayant pas de raison d'être continue en a, il serait préférable d'écrire $g(a+)$ au lieu de $g(a)$.

Etape 4 On associe à chaque entier $n \geq 1$ les sommes de Riemann S_n et R_n de la fonction g, et l'on note h_n, k_n les fonctions en escalier correspondantes.

Alors, $h_n \leq g \leq k_n$ et, si l'on choisit les valeurs aux bornes pour que $h_n(b) = k_n(b) = g(b)$ et $h_n(a) = k_n(a) = g(a)$, on voit que

$$\int_I |h_n - g)| \leq \int_I |h_n - k_n)| = \frac{b-a}{n}\left(g(a) - g(b)\right).$$

Il en résulte que

$$\left|\int_I f\ h_n - \int_I f\ g\right| \leq \frac{b-a}{n}\left(g(a) - g(b)\right)\|f\|_\infty .$$

D'autre part, l'étape 3 donne l'encadrement $g(a)\ \inf_I F \leq \int_I f\ h_n \leq g(a)\ \sup_I F$ pour tout n.

D'ou, à la limite, $g(a)\ \inf_I F \leq \int_I f\ g \leq g(a)\ \sup_I F$, et l'étape 2 donne la conclusion.

■

Pour un exemple d'application, on se reportera au § 12-5-6-3.

12.4 Intégrales impropres

12.4.1 Situations

Commençons par observer que si une fonction continue sur un intervalle borné $]a, b]$ admet un prolongement continu en a, ce qui suit est sans objet. Ainsi, on considère $\frac{\sin x}{x}$ et $x \ln x$ comme fonctions continues sur $[0, b]$ pour tout réel $b > 0$.

Mettons en évidence deux situations élémentaires où le besoin de prolonger la notion d'intégrale au sens précédent est évident.

1. La fonction à intégrer est continue (plus généralement continue par morceaux ou réglée) sur un intervalle I non fermé et/ou non borné.

   La fonction est alors intégrable sur tout segment K inclus dans I.

   Par exemple si α est réel strictement positif, prenons $f(x) = e^{-\alpha x}$, sur $[0, +\infty[$ (ou $e^{\alpha x}$ sur $]-\infty, 0]$) et $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

   Il est naturel de chercher les limites suivantes, si elles existent dans $\mathbb{R}$.

$$L1 = \lim_{x\to+\infty} \int_{[0,x]} e^{-\alpha t} dt \text{ et } L2 = \lim_{x\to+\infty} \int_{[1,x]} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

La réponse est immédiate,

$$\begin{aligned} L1 &= \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-\alpha x}\right)=\frac{1}{\alpha}. \\ L2 &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{-\alpha+1}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha>1 \\ +\infty \text{ si } \alpha<1\end{cases}. \end{aligned}$$

2. L'intervalle est borné, non fermé.

   Par exemple si α est réel strictement positif,

$$L3=\lim_{x\to0^+}\int_{[x,1]}\frac{1}{t^\alpha}dt=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to0^+}\left(x^{-\alpha+1}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha<1 \\ +\infty \text{ si } \alpha>1\end{cases}$$

   De même, la fonction $\ln$ est continue sur tout segment K inclus dans $]0,1]$, mais n'est pas réglée sur $[0,1]$.

   Une intégration par parties sur $[x,1]\subset]0,1]$ donne

$$L4=\lim_{x\to0^+}\int_x^1\ln t dt=\lim_{x\to0^+}-x\ln x=0$$

3. Rappelons l'exemple des intégrales de **Bertrand** vu en T.D. au chapitre 9, qui contient plusieurs des cas précédents.

   Il s'agit de l'intégrale impropre

$$L5=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta},\quad \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

   Pour $\alpha=1$, faire le changement de variable $x=e^t$.

   Pour $\alpha>1$, comparer $x^\alpha(\ln x)^\beta$ à $x(\ln x)^2$ par exemple.

   Pour $1>\alpha>0$, comparer $x^\alpha(\ln x)^\beta$ à x par exemple.

   En résumé,

   Si $\alpha = 1$, $L5$ converge pour $\beta>1$, diverge sinon
   Si $\alpha > 1$, $L5$ converge (quel que soit β)
   Si $\alpha < 1$, $L5$ diverge (quel que soit β).

Dans tous les cas où l'intégrale possède une limite réelle, on peut être tenté de dire (par abus), que la fonction est intégrable, par exemple sur $[0,+\infty[$ pour $L1$ ou sur $]0,1]$ pour $L4$. Rien n'est plus dangereux car en dehors de l'existence de la limite, les propriétés de l'intégrale vues dans les sections précédentes n'ont aucune raison de se prolonger à cette situation.

Par exemple, la suite de fonctions $f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$, mais ne converge pas en moyenne vers 0 sachant que $\int_{[0,n]}f_n=1$.

En conclusion, la seule possibilité est de calculer des limites d'intégrales relevant de l'étude précédente, et utiliser le terme d'**intégrale impropre** à cet effet.

On peut objecter que pour l'intégrale de Lebesgue dont il sera question au chapitre 20, il est licite d'écrire $\int_{[0,+\infty[}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$. Effectivement, nous l'écrirons, mais pas avant de savoir ce qu'est l'intégrale de Lebesgue ! Utiliser le symbole $\int$ sans préciser de quelle intégrale il s'agit est une supercherie.

De plus, nous verrons que la convergence d'une intégrale impropre et l'intégrabilité pour la mesure de Lebesgue ne sont équivalents que pour les fonctions à valeurs positives.

Enfin, l'intégrabilité concernera les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, tandis que pour un intervalle non borné, les passages à la limite que l'on vient d'évoquer ne concernent que les demi-droites. Comparer par exemple les limites de $\int_{[-x,x]} tdt$ et de $\int_{[-2x,x]} tdt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

L'exemple suivant montre que la convergence d'une intégrale impropre d'une fonction f et la convergence de l'intégrale impropre de $|f|$ ne sont pas des propriétés équivalentes.

Exemple 12.7 *a) Transformer $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ à l'aide d'une i.p.p., pour faire apparaître $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$, et prouver que $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe.*

b) Pour prouver que $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt$ n'existe pas, on pourra minorer chaque intégrale $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ par $\frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin t dt = \frac{2}{n\pi}$.

Un autre procédé est la négation de la propriété de Cauchy, en écrivant pour $1 < x < y$,

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{|\sin t|}{t} dt &\geq \int_x^y \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_x^y \frac{1}{2t} dt - \left| \int_x^y \frac{\cos 2t}{2t} dt \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \ln \frac{y}{x} - \left(\frac{|\sin 2y|}{4y} + \frac{|\sin 2x|}{4x} + \frac{1}{4} \int_x^y \frac{|\sin 2t|}{t^2} dt \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y},\end{aligned}$$

d'où un minorant strictement positif possible par exemple avec $y = 2x$.

Evidemment, ce qui précède ne donne aucune indication sur la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Cette question sera reprise dans les T.D. du chapitre 20.

12.4.2 Quelques méthodes

Définition 12.10 *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une application $f : I \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur I si la restriction de f à tout segment $K \subset I$ est réglée.*

Exemple 12.8 $\sin \frac{1}{x}$ *et* $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *sont localement intégrables sur* $]0, 1]$.

Pour les raisons évoquées dans l'introduction, on ne considère que des intervalles I de la forme $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$ avec a et b réels, étant entendu que les cas $]a, b]$ et $]-\infty, b]$ s'y ramènent, et des fonctions localement intégrales sur I.

Dans les exercices, toute étude d'intégrale impropre d'une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, par exemple $\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$, devra être séparée en deux études respectivement sur $]a, c]$ et $[c, b[$, le choix de c étant théoriquement indifférent (ce qui n'exclu pas des choix privilégiés par des arguments de commodité).

Définition 12.11 *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle I de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

*On dira que f admet sur I une **intégrale impropre convergente** (resp. **absolument convergente**) si la limite $\lim_{x\to b} \int_{[a,x]} f$ (resp. $\lim_{x\to b} \int_{[a,x]} |f|$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite (finie) sera notée $\int_a^{\to b} f(x)dx$.*

La fonction f admet une intégrale impropre est ***divergente*** *sinon.*

Proposition 12.23 *Si une fonction localement intégrable sur un intervalle I de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ admet sur I une intégrale impropre absolument convergente, alors elle admet sur I une intégrale impropre convergente, et*

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)dx\right| \leq \int_a^{\to b} |f(x)|\, dx.$$

Démonstration

Si $\lim_{x\to b}\int_{[a,x]}|f|$ existe, alors (propriété de Cauchy), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c(\varepsilon) \in [a,b[$ tel que $\int_{[x',x'']}|f| < \varepsilon$ pour $c(\varepsilon) < x' < x'' < b$, et donc $\left|\int_{[x',x'']} f\right| < \varepsilon$ dans les mêmes conditions.

La réciproque de la propriété de Cauchy montre que $\lim_{x\to b}\int_{[a,x]} f$ existe, et l'inégalité $\left|\int_{[a,x]} f\right| \leq \int_{[a,x]}|f|$ pour tout $x \in [a,b[$ donne d'abord $\left|\int_{[a,x]} f\right| \leq \int_a^{\to b}|f(x)|\,dx$ puis $\left|\int_a^{\to b} f(x)dx\right| \leq \int_a^{\to b}|f(x)|\,dx$. ■

La réciproque est fausse comme on l'a vu dans la section précédente. Les intégrales impropres convergentes et non absolument convergentes sont appelées **semi-convergentes**. Nous n'approfondirons pas l'édude dans ce cas (voir cependant la Règle d'Abel en T.D.).

Par contre, pour les fonctions positives (ou l'absolue convergence), l'étude est facilitée par le fait que la fonction $F : x \longmapsto \int_{[a,x]} f$ est croissante sur I, elle admet donc une limite si et seulement si elle est majorée.

En pratique, on est conduit à comparer les situations données par majoration directe ou indirecte (équivalent) de F à l'aide des exemples L1à L5 de l'introduction, qui sont évidemment à connaître pour s'y référer sans répéter le raisonnement.

La proposition qui suit, et son corollaire, permettent de traiter les cas usuels.

Définition 12.12 *Dans un intervalle I, une* ***suite exhaustive de segments*** *est une suite $K_n = [a_n, b_n]$ telle que*

$$\begin{aligned} \forall n,\ K_n &\subset I \\ K_{n+1} &\supset K_n \\ \bigcup_n K_n &= I. \end{aligned}$$

Exemples

$I = [0,1[$ et $K_n = \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$.

$I = [0,+\infty[$ et $K_n = [0,n]$.

Proposition 12.24 *Soit f une fonction localement intégrable* ***positive*** *sur un intervalle I de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f admet une intégrale impropre absolument convergente sur I.

b) Il existe une suite exhaustive (K_n) de segments de I telle que $\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f$ existe.

c) Il existe un réel M tel que, pour tout segment K inclus dans I, $\int_K f \leq M$.

2) Si la propriété b) est vérifiée, la limite est indépendante du choix de la suite exhaustive (K_n)*, et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f = \int_a^{\to b} f(x)dx.$$

Démonstration

Equivalence de a) et b).

Supposons que f soit intégrable.

Pour une suite exhaustive (K_n) de segments de I, posons $g_n = |f|\ \chi_{K_n}$.

Les fonctions g_n sont intégrables compte tenu de l'hypothèse sur f, la suite (g_n) est croissante, de limite $|f|$, et les mesures $\int_I g_n$, égales à $\int_{K_n} |f|$, sont majorées par $\int_I |f|$. Il résulte du théorème de la convergence monotone que $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \int_I |f|$.

La réciproque est analogue, la majoration des mesures $\int_I g_n$ résultant cette fois-ci de l'hypothèse.

Equivalence de b) et c).

Si b) est vérifié, on vient de voir que f est intégrable, il en résulte que $M = \int_I |f|$.

Inversement, la propriété c) montre que pour **toute** suite exhaustive (K_n) de segments de I, la suite $\int_{K_n} |f|$ est convergente, étant croissante et majorée.

Vérifier la *Propriété 2)* est un exercice.

■

Remarque 12.5 *Pour affirmer qu'une fonction telle que f égale à -1 sur $]-\infty, 0[$, à $+1$ sur $]0, +\infty[$ (on peut remplacer 1 par x) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut donc soit évoquer la non intégrabilité de $|f|$, soit la contradiction avec la propriété 2), en prenant les segments $[-n, n]$, $[-2n, n]$, $[-n, 2n]$ par exemple.*

Corollaire 12.25 *Supposons données deux fonctions f, g localement intégrables sur un intervalle I de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

a) Si $|f| \leq |g|$, et si g admet une intégrale impropre absolument convergente sur I, alors il en est de même pour f.

b) Si $|f| \underset{b}{\sim} |g|$ et si g admet une intégrale impropre absolument convergente sur I, alors il en est de même pour f.

Remarque 12.6 *On observera que ce corollaire ne donne pas la valeur de $\int_a^{\to b} f(x)dx$.*

Pour la fonction $\frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$, on remarquera que la majoration $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ n'est pas opérante telle qu'elle. Il convient de découper en trois intervalles. Sur $[a, +\infty[$, donc sur $]-\infty, -a]$, avec $a > 0$, l'intégrabilité de $\frac{1}{t^2}$ est utilisable, sur $[-a, a]$, la fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est continue, donc intégrable.

Par abus, on peut dire que $\frac{1}{1+t^2}$ admet une intégrale impropre convergente sur $\mathbb{R}$, égale à π, en prenant la limite de $\arctan$ à l'infini et en utilisant la parité.

Rappelons que l'abus d'écriture $\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ n'est tolérable qu'en raison de cette parité.

Les équivalents sont utiles pour se "débarasser" des fonctions qui ont une limite en b, dans un produit.

Par exemple, sur $]0,1]$, $\left|t^{a-1}e^{-t}\right| \underset{0}{\sim} \left|t^{a-1}\right|$.

Un autre exemple, plus subtil, consiste à "dédoubler" l'un des facteurs du produit. Par exemple, sur $[1,+\infty[$, $\left|t^{a-1}e^{-t}\right| = \left|t^{a-1}e^{-\frac{t}{2}}\right| e^{-\frac{t}{2}} \leq e^{-\frac{t}{2}}$ sur un intervalle convenable $[t_0,+\infty[$, sachant que $\lim_{t\to+\infty} \left|t^{a-1}e^{-\frac{t}{2}}\right| = 0$ (quel que soit le paramètre réel a). L'intervalle $[1,+\infty[$ est donc subdivisé en sous-intervalles $[0,t_0]$ et $[t_0,+\infty[$, avec un argument différent pour chacun d'eux.

Exercices

Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1. $\int_0^{\to 1} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. $\int_{\to 0}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}$.

3. $\int_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$.

4. Convergence et calcul de $\int_0^{\to+\infty} \frac{t\,\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$

   (pour le calcul, on peut faire le changement de variable $t=\frac{1}{u}$ sur un segment inclus dans $[0,+\infty[$.

5. Le corollaire 12-22 est relatif à l'absolue convergence. On ne peut donc pas se passer des valeurs absolues comme le montre l'exemple suivant.

   L'intégrale impropre $\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente, l'intégrale impropre $\int_0^{\to+\infty} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}\right) dt$ est divergente, cependant les fonctions $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = f(t) + \frac{\sin^2 t}{t}$ sont équivalentes à l'infini.

Solution

4) La convergence est immédiate en majorant $\frac{t\ln t}{t^2+1}$. Le changement de variable donne $\int_x^y \frac{t\,\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \frac{u\,\ln u}{(u^2+1)^2}\,du$ et par suite l'intégrale est égale à son opposé donc nulle.

5) Les fonctions f et g sont continues en 0.

Pour f, mettons à part $\int_0^1 f$ compte tenu du prolongement continu à l'origine obtenu avec $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\frac{\sin t}{t}$.

Une i.p.p. donne $\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$. D'une part le crochet est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{\sqrt{t}}$, donc a une limite nulle à l'infini, d'autre part l'intégrale impropre $\int_1^{\to+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est absolument convergente. D'où la conclusion pour f.

Pour g, il suffit de voir que l'intégrale impropre $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt$ diverge en décomposant $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{\cos 2t}{t}\right)$, et en intégrant $\frac{\cos 2t}{t}$ par parties sur $[1,x]$. En effet, $\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\cos 2t}{t^2}dt$.

Enfin, $\lim_\infty \frac{g}{f} = 1$.

12.5 Travaux dirigés

12.5.1 Norme de convergence uniforme : une justification de la notation

Soit f une fonction réelle positive continue sur un segment $I = [a, b]$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'inégalité $\left(\int_I (f)^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{n}}$.

2. Il existe un réel $x_0 \in I$ tel que $\|f\|_\infty = f(x_0)$. Pourquoi ?

3. En utilisant la définition de la continuité de f en x_0, en déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $J = [a_1, b_1]$ inclus dans I, tel que $f(x) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $x \in J$.

4. En déduire que $(b_1 - a_1)^{\frac{1}{n}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \left(\int_I (f)^n\right)^{\frac{1}{n}}$, puis que
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_I (f)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty .$$

12.5.2 Calculs de primitives

12.5.2.1 Primitives des fonctions rationnelles réelles

Rappelons le théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x)$ (Prop. 1-).

Si la décomposition de $Q(x)$ en produit de facteurs irréductibles s'écrit (tous les coefficients sont réels)
$$Q(x) = c\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{s}\left(x^2+b_jx+c_j\right)^{n_j}$$
avec
$$\forall j \in \,]s],\ b_j^2 - 4c_j < 0,$$
alors il existe une décomposition unique de $F(x)$ sous la forme
$$F(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{i,k}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{B_{j,k}\,x + C_{j,k}}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$$
où E est le polynôme quotient de la division euclidienne de P par Q, et les $A_{i,k}$, $B_{j,k}$, $C_{j,k}$ sont des constantes réelles.

Il en résulte que les primitives de $F(x)$ se ramènent aux trois cas suivants.

1. Eléments dits de *première espèce*, $I_k = \int \frac{dx}{(x-a)^k}$.
   a. $k = 1$, $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$
   b. $k > 1$, $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$.

2. Eléments dits de *deuxième espèce*
   a. $J_k = \int \frac{dx}{(x^2-2\alpha x+\beta)^k}$, avec $\alpha^2 - \beta < 0$.
   En écrivant le trinôme $x^2 - 2\alpha x + \beta$ sous la forme $\left(\beta-\alpha^2\right)\left(1+\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)$, puis en effectuant le changement de variable $t = \frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}$, on est ramené à $L_k = \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$, qui se calcule par récurrence sur k.

D'une part $L_1 = \text{Arc}\tan t$, d'autre part si $k \geq 2$,

$$L_k = \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{\left(t^2+1\right)^k} dt = L_{k-1} - M_k$$

avec (i.p.p)

$$\begin{aligned} M_k &= \int t \, \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} dt \\ &= \frac{t}{2(1-k)(t^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} L_{k-1}. \end{aligned}$$

b. $H_k = \int \frac{x}{(x^2-2\alpha x+\beta)^k} dx$, avec $\alpha^2 - \beta < 0$ se décompose en $H_k = \alpha J_k + N_k$, avec

$$N_k = \int \frac{x-\alpha}{\left(x^2 - 2\alpha x + \beta\right)^k} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - 2\alpha x + \beta\right) & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2-2\alpha x+\beta)^{k-1}} & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

12.5.2.2 Exercices

1. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$
2. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$(Réponse : $\frac{2}{3}\sqrt{3} \arctan \frac{1}{3}\left(2x+1\right)\sqrt{3}$)
3. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (Réponse : $\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x$)
4. $\int \frac{x^3+2x+1}{(1+x^2)^2} dx$ (Réponse : $\frac{1}{4}\frac{2x-2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$)
5. Trouver une relation de récurrence entre $A_k = \int \frac{dx}{(x^\alpha+1)^k}$ et A_{k-1}, k entier au moins égal à 2, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Indication. Procéder comme pour L_k.

12.5.3 Convergence uniforme

On veut calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ pour la fonction continue

$$f(x) = \begin{cases} x^{-x} = \exp\left(-x \ln x\right) \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Exrire f comme somme d'une série de fonctions et justifier l'intégration terme à terme. En déduire l'expression de $\int_0^1 x^{-x}dx$ comme somme d'une série numérique.
2. Pour un calcul approché, démontrer que le reste R_n est majoré par $\frac{1}{n(n+1)^n}$, en déduire l'intégrale à $3\ 10^{-5}$ près.

Solution

1) Pour tout $x \in [0,1]$, le développement en série entière de l'exponentielle réelle donne

$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x \ln x\right)^n}{n!}$$

En notant $M = \sup_{[0,1]} |x \ln x|$, la valeur absolue du terme général est majorée uniformément par $\frac{M^n}{n!}$, donc la série converge normalement. D'où l'intégration terme à terme. Une première intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n \ln x^n dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{-n}{n+1}\int_0^1 x^n \ln x^{n-1}dx.\end{aligned}$$

De même,

$$\int_0^1 x^n \ln x^{n-p}dx = -\frac{n-p}{n+1}\int_0^1 x^n \ln x^{n-p-1}dx.$$

Finalement,

$$\int_0^1 x^n \ln x^n dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}},$$

et

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

2)

$$\begin{aligned}0 \quad \leq \quad R_n &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + ...\\ &\leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+...\right)\\ &= \frac{1}{n\,(n+1)^n}\end{aligned}$$

En calculant ce majorant de R_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, on trouve $\frac{1}{n(n+1)^n} > 3.10^{-5}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et

$$0 \leq R_5 \leq \frac{1}{5.6^5} \leq 3.10^{-5}.$$

D'où la valeur approchée $1.\,291\,26$ pour $\sum_{n=1}^{5} n^{-n}$.

12.5.4 Formule de Stirling

Il s'agit de démontrer la formule de Stirling

$$n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1. Convergence de la suite (a_n). *Méthode 1*

Posons $S_n = \ln a_n$ et $T_n = S_n - \frac{1}{n}$.

On veut prouver que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes. Déduire cela de la double inégalité

$$0 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Indication Une des inégalités sera obtenue à partir de la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$.

Pour l'autre inégalité, on démontrera successivement les relations suivantes.

+ $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq 6$

+ $\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], 0 \leq \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \leq \frac{6t^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$

+ $0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2}dt \leq \frac{1}{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

2. Convergence de la suite (a_n). *Méthode 2*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

   a. Démontrer que u_n est équivalent en l'infini à $-\frac{1}{12n^2}$.
   b. En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3. Calcul de la limite L de la suite a_n.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on envisage la suite des intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$.

   a. Calculer I_0, I_1, et prouver que la suite (I_n) est positive et décroissante.
   b. Démontrer la relation
   $$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
   c. Recherche d'un équivalent de I_n.
   + Après avoir justifié l'encadrement, $\frac{n+1}{n+2} I_n \le I_{n+1} \le I_n$, prouver que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.
   + Prouver que la suite de terme général $(n+1)\, I_n I_{n+1}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.
   + En déduire que $I_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

   d. Démontrer les formules
   $$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{\pi}{2} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots.(2p)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \\ I_{2p+1} &= \frac{2.4\ldots.(2p)}{1.3\ldots(2p-1)(2p+1)} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$
   e. Démontrer que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
   f. En déduire que $L = \sqrt{2\pi}$ et la formule de Stirling.

Solution

1) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$. Pour $x \ge 0$, f est donc croissante, de sorte que $f\left(\frac{1}{n}\right) \ge f(0) = 0$, ce qui s'écrit
$$0 \le \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$
et donc $0 \le \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

L'autre inégalité s'écrit
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$
On la démontre facilement avec la démarche proposée et la primitive de la fonction rationnelle
$$\int \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} dt = \ln(t+1) + \frac{4}{t+2}$$
d'où l'on déduit
$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} dt = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$
On a alors $S_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n$.

Les inégalités précédentes donnent la décroissance de S_n, la croissance de T_n et enfin $\lim(T_n - S_n) = 0$ est évident, d'où la convergence de S_n et donc de a_n.

2) On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\left(1+\varepsilon(\frac{1}{n})\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2}\left(1+\varepsilon(\frac{1}{n})\right). \end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ étant à termes de signe constant, est convergente, il en est donc de même pour la suite $\ln a_n$, donc pour a_n (continuité de l'exponentielle !).

3)a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1$. Dans I_n la fonction intégrée est continue et positive non nulle, donc $I_n > 0$, et $I_{n+1} < I_n$ résulte de la comparaison de $(\cos t)^n$ et $(\cos t)^{n+1}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (pour l'inégalité large) et de la continuité (pour l'inégalité stricte).

3) b)

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)(\cos t)^n \, dt \\ &= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)(\sin t \, \cos^n t) \, dt \\ &= I_n - \left[-\frac{\sin t \, \cos^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t)^{n+2}}{n+1} dt \text{ par i.p.p.} \\ &= I_n - \frac{I_{n+2}}{n+1}. \end{aligned}$$

D'où la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3) c) L'encadrement indiqué est une conséquence évidente de la décroissance de (I_n) et de la relation précédente. Sachant que $I_n > 0$, il s'en suit par division que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

La suite de terme général $(n+1) I_n I_{n+1}$ est constante. En effet pour $n \geq 0$

$$\frac{(n+1) I_n I_{n+1}}{(n+2) I_{n+1} I_{n+2}} = \frac{(n+1) I_n}{(n+2) I_{n+2}} = 1,$$

de plus $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= (n+1) I_n I_{n+1} = (n+1) I_n^2 (1+\varepsilon_n) \text{ avec } \lim_{\infty} \varepsilon_n = 0 \\ &= \frac{n+1}{n} n I_n^2 (1+\varepsilon_n), \end{aligned}$$

et par suite, $\lim_\infty \frac{2nI_n^2}{\pi} = 1$, ce qui donne l'équivalent cherché.

3) d) Avec la relation du 3-b),

$$I_2 .... I_{2p} = \frac{1}{2} ... \frac{2p-1}{2p} \, I_0 .... I_{2p-2}$$

donc

$$I_{2p} = \frac{1}{2} ... \frac{2p-1}{2p} \, I_0,$$

ce qui donne la relation cherchée. La vérification de l'autre relation est analogue.

3) e) La relation s'obtient facilement en écrivant $\lim_{p\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ pour n pair et n impair.

3) f) Pour relier la suite $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et l'expression précédente, il suffit d'observer que

$$a_{2n} = \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}} \text{ et } a_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}},$$

puis on écrit

$$\begin{aligned}\frac{a_n^2}{a_{2n}} &= \frac{(n!)^2\, 2^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!n} \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}\frac{\sqrt{(2n)\,(2n+1)}}{n}.\end{aligned}$$

A la limite, cela donne $L = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$ et donc la formule de Stirling.

12.5.5 Exemple d'utilisation de la méthode des rectangles

Il s'agit de calculer l'intégrale dite de **Poisson**,

$$I_\alpha = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2\right) dt,\ \ \alpha \text{ réel distinct de } \pm 1.$$

1. La fonction à intégrer $f(t) = \ln\left(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2\right)$ est-elle définie et continue sur $[0,\pi]$?
2. On veut calculer I_α en utilisant la suite de Riemann $R_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f\left(k\frac{\pi}{n}\right)$.
   a. En utilisant la relation $1 - 2\alpha\cos k\frac{\pi}{n} + \alpha^2 = \left(\alpha - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)$, démontrer que
   $$R_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{2n}\right)\right).$$
   b. En déduire I_α dans les deux cas $|\alpha| < 1$ et $|\alpha| > 1$.

12.5.6 Majoration d'erreur pour la méthode des rectangles médians.

Cet exercice propose une démonstration directe du théorème de Riemann dans le cas de la méthode des rectangles médians et fournit en outre une majoration de la différence $\left|\int_a^b f - T(n)\right|$.

Soit f une fonction C^∞ sur un segment $[a,b]$, et $[\alpha,\beta]$ un segment inclus dans $[a,b]$. On pose $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

1. Vérifier que $\int_\alpha^\beta (t-\gamma)\,dt = 0$.

   En déduire la relation
   $$\int_\alpha^\beta \left(f(t) - f(\gamma) - (t-\gamma)\,f'(\gamma)\right)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)\,f(\gamma).$$
2. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un pour f, entre le point $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et un point $t \in [\alpha,\beta]$.

   En déduire la majoration
   $$|f(t) - f(\gamma) - (t-\gamma)\,f'(\gamma)| \leq M\frac{(t-\gamma)^2}{2},$$
   où M est un majorant de $|f''|$ sur $[a,b]$.
3. Déduire des questions précédentes la relation
   $$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| \leq \frac{M}{24}(\beta-\alpha)^3.$$

4. Avec les notations du cours, prouver que, pour tout $n \geq 1$,
$$\left| \int_a^b f - T(n) \right| \leq \frac{M\,(b-a)^3}{24n^2}.$$

12.5.7 Majoration de l'erreur par la méthode des trapèzes

f est une fonction C^2 définie sur un segment $I = [a, b]$, à valeurs réelles.

1. Effectuer une intégation par parties sur $\int_I f(t)dt$ en prenant $\frac{(t-a)+(t-b)}{2}$ comme primitive de 1.

2. Effectuer une intégation par parties sur $\int_I \frac{(t-a)+(t-b)}{2}\, f'(t)dt$ en prenant $\frac{(t-a)(t-b)}{2}$ comme primitive de $\frac{(t-a)+(t-b)}{2}$.

3. En déduire la majoration
$$\left| \int_I f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}\,(f(b)+f(a)) \right| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{12}.$$
Rappel : $\|f''\|_\infty$ est la borne supérieure de $|f''(t)|$, lorsque t décrit le segment I.

4. On dit que $\frac{(b-a)}{2}\,(f(b)+f(a))$ est l'approximation de $\int_I f(t)dt$ par la méthode des trapèzes à un pas. Justifier cette dénomination par une figure.

5. Si la fonction f est polynômiale de degré deux, $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, prouver que l'inégalité de la question 3 est une égalité.

6. Enoncer et démontrer la réciproque.

7. On suppose donnée une subdivision régulière du segment $[a, b]$ à n cellules de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

   Déduire de la question 3 la relation suivante :
$$\left| \int_I f(t)dt - T_n \right| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{12\, n^2}.$$
   où
$$T_n = h\left(\frac{1}{2}\,(f(a)+f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right)$$

12.5.8 Intégrales impropres

12.5.8.1 I.p.p. et changements de variables

Ces propriétés n'ont été établies que pour les fonctions réglées sur un segment. On ne peut pas les utiliser à priori pour les intégrales impropres, mais avant les passages à la limite aux bornes de l'intervalle d'intégration.

1. Prouver que
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^{\to 1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

2. Validité et calcul de l'expression $\int_{\to a}^{\to b} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

Indication : Sur un segment, poser $x = \frac{t-a}{b-t}$. Attention, ceci est la réciproque du changement de variable.

3. Intégrabilité et calcul de $\int_{\to 0}^{\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}\ dx$.

   Pour le calcul, commencer par évaluer $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. On se souviendra de $\frac{d}{dx} \arcsin(ax+b) = \frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$.

12.5.8.2 Relation série-intégrale en cas de divergence

On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, autrement dit $\lim_{n\to\infty} \left(1 + .. + \frac{1}{n}\right) = +\infty$. Dans ce problème, on étudie comment on peut obtenir une suite convergente en retranchant de la suite $S(n) = 1 + .. + \frac{1}{n}$ un autre “infiniment grand”, avec une méthode qui s’applique à toute série divergente à termes positifs.

1. On s’intéresse dans cette question au cas de la fonction définie par

   $f(t) = \frac{1}{t}$.

   a. Démontrer l’inégalité
   $$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \geq \ln n.$$
   b. Démontrer que la suite de terme général $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ est monotone convergente. La limite de la suite est la constante d’Euler γ.

   c. On pose $v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}$, avec k entier, $k \geq 2$.
   Vérifier d’une part l’inégalité $v_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,
   d’autre part l’égalité $v_k = x_{k-1} - x_k$.
   A partir de $x_n - x_p$ pour $p > n$, obtenir l’encadrement
   $$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma \leq \frac{1}{n}.$$
   Donner une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.

2. On s’intéresse maintenant au cas de la fonction $f : t \to \frac{\ln t}{t}$.

   a. Démontrer la convergence de la suite de terme général
   $$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}\right) - \frac{1}{2}(\ln n)^2, \quad n \geq 1$$
   N.B. La fonction f n’est décroissante que pour $t \geq e$.

   b. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.
   Indication : exprimer la somme partielle $\sum_{p=1}^{2n} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$ en fonction de la suite (u_n) et de la constante γ.

12.5.8.3 Règle d’Abel

f et g sont des fonctions localement intégrables sur un intervalle I de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

On suppose que g est décroissante, de limite 0 en b (donc g est positive sur I), et qu’il existe $M > 0$ tel que $\left|\int_K f\right| \leq M$ sur tout segent $K \subset I$.

1. Démontrer que $f\ g$ a une intégrale impropre convergente sur I.

   Indication : En appliquant la deuxième formule de la moyenne, prouver que $\lim_{x\to b} \int_{[a,x]} fg$ existe à l’aide de la propriété de Cauchy.

2. Application. Cas de convergence de $\int_1^{\to+\infty} t^{-\alpha}\exp(i\lambda t)\ dt$ (pour le cas $\alpha \leq 0$, on pourra étudier la suite $\left|\int_{n\frac{\pi}{\lambda}}^{(n+1)\frac{\pi}{\lambda}} t^{-\alpha}\sin(\lambda t)\ dt\right|$).

Solution

1) Prenons $K = [u, v]$. Il existe $c \in K$ tel que $\left|\int_K f\ g\right| = g(u)\left|\int_{[u,c]} f\right| \leq M\ g(u)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir u pour que $g \leq \frac{\varepsilon}{M}$ sur K, et donc $\left|\int_K f\ g\right| \leq \varepsilon$, ce qui entraine l'existence de $\lim_{x\to b}\int_{[a,x]} fg$.

2) Si $\alpha > 1$, l'intégrale est absolument convergente (évident).

Si $0 < \alpha \leq 1$, on a $\left|\int_{[u,v]}\exp(i\lambda t)\ dt\right| = \left|\frac{\exp(i\lambda v)-\exp(i\lambda u)}{i\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$ donc la règle d'Abel s'applique. L'intégrale impropre est semi-convergente.

Si $\alpha \leq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{n\frac{\pi}{\lambda}}^{(n+1)\frac{\pi}{\lambda}} t^{-\alpha}\sin(\lambda t)\ dt\right| &= \int_{n\frac{\pi}{\lambda}}^{(n+1)\frac{\pi}{\lambda}} t^{-\alpha}\left|\sin(\lambda t)\right|\ dt\\ &\geq \left(n\frac{\pi}{\lambda}\right)^{-\alpha}\int_{n\frac{\pi}{\lambda}}^{(n+1)\frac{\pi}{\lambda}}\left|\sin(\lambda t)\right|\ dt\\ &= \left(n\frac{\pi}{\lambda}\right)^{-\alpha}\frac{2}{\lambda}\end{aligned}$$

donc l'intégrale impropre est divergente.