Géométrie différentielle et Mécanique, Pierre Aimé, supplément Internet.

Nature symplectique du calcul des variations

1 Introduction

Comme on l'a vu au chapitre 5, les équations de Lagrange du mouvement d'un système mécanique relevant de la définition 1-67 sont de nature symplectique.

Lorsque le dyname des efforts admet une fonction de forces U indépendante du temps, ces équations ((35) § 5-4-3-2) sont aussi les équations d'Euler solution d'un problème de calcul des variations relatif à "l'action" $\mathcal{T} + U$.

Ceci pose le problème de l'équivalence entre le "principe de moindre action" d'Hamilton et les propriétés TF1 à TF5 du théorème fondamental de la dynamique (Prop. 5-47).

Cette note ne suppose pas de connaissances préalables en calcul des variations. Néanmoins, le lecteur intéressé pourra se reporter aux exposés classiques dans les ouvrages de calcul différentiel (dans le cadre des espaces de Banach), par exemple

1 - H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, 1982.

2 - A. Avez, Calcul différentiel, Masson, 1983.

3 - G. Christol, A. Cot, C.-M. Marle, Calcul différentiel, Ellipses, 1997.

Remarquons d'emblée que les équations d'Euler d'un problème variationnel à une variable ne sont que des conditions nécessaires d'extrema, et seulement des expressions locales.

On se propose ici d'établir une relation globale, qui prouve la nature symplectique des problèmes variationnels à une variable sur une variété différentielle. La proposition énoncée provient de

A.L. Besse, Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, 1978,

avec une argumentation légèrement modifiée pour la démonstration.

2 Les problèmes de calcul des variations

Un point de vue général est celui des variations de sections :

Une variété fibrée $\pi : E \to B$ étant donnée, une **variation** ou **déformation** d'une section locale $s : V \to E$ est une application différentiable $\sigma : V \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$, où ε est un réel >0, telle que $\sigma(., 0) = s$.

En particulier, pour une variété M, $B = \mathbb{R}$, $V = [0, 1]$, $E = B \times M$, $\gamma : V \to M$ un arc paramétré donné, et $s(t) = (t, \gamma(t))$, on a le point de vue des variations d'arcs, dont l'étude pour $M = \mathbb{R}^n$ est présentée dans les références 1,2,3 ci-dessus.

Les applications partielles associées à σ sont

$$\begin{aligned}\sigma_b &: \quad u \longmapsto \sigma(b,u) = \sigma_b(u),\\ \sigma_u &: \quad b \longmapsto \sigma(b,u) = \sigma_u(b).\end{aligned}$$

On se limite ici au cas des variations d'arcs.[1]

On peut énoncer et démontrer les résultats de la théorie en utilisant ces applications partielles, mais si l'on s'intéresse aux variations d'arcs en tant que telles, l'étude porte sur l'application $u \longmapsto \sigma_u$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des arcs (différentiables) $[0,1] \to M$, qu'il convient de doter d'une structure de variété. Ce n'est possible que si l'on introduit les variétés banachiques (les espaces de Banach suffisent lorsque $M = \mathbb{R}^n$).

Précisons le problème étudié, ce qui permettra de voir comment on peut éviter le recours à une "variété" d'arcs.

Les données sont une variété M, et une fonction $L \in \Omega^0(TM)$.

On s'intéresse aux arcs $\gamma : [0,1] \to M$, extrémaux[2] pour la fonction Φ : $\gamma \longmapsto \int_0^1 L\left(\dot{\gamma}\right)$, définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$. Plus précisément, à une condition nécessaire pour qu'un arc réalise un tel extremum.

Si γ est un extrémum de Φ, alors pour toute variation σ de γ, la fonction $u \longmapsto \int_0^1 L\left(\dot{\sigma_u}\right)$ est éxtrémale au point $u = 0$, et donc

$$\frac{d}{du}\int_0^1 L\left(\dot{\sigma_u}\right)|_{u=0} = \int_0^1 \frac{d}{du} L\left(\dot{\sigma_u}\right)|_{u=0} = 0.$$

Le résultat qui est l'objet de cette note concerne les **variations** dites **à extrémités fixes** de γ, c'est à dire pour lesquelles $\sigma\left(0,u\right) = \gamma(0)$ et $\sigma\left(1,u\right) = \gamma(1)$ pour tout u, ce qui reste une condition nécessaire.

3 La propriété

Enoncé. *Etant donné une variété M, et une fonction $L \in \Omega^0(TM)$, si γ : $[0,1] \to M$ est extrémal pour la fonction Φ, alors* $i_{\dot{\gamma}}\mathbf{d}\widehat{d}L = d\left(\mathcal{V}.L - L\right)$.

Les deux membres sont évalués au point $\dot{\gamma}(t)$.

Cette propriété ramème donc la question des extrémales aux trajectoires hamiltonniennes, sous réserve de régularité de L (Prop. 5-42). On rappelle que la dérivée verticale $\widehat{d}L$ a été définie au § 3-3-3-1.

Démonstration.

Etape 1. Supposons t fixé.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(L \circ \dot{\sigma_u}(t)\right) \quad | \quad {}_{u=0} &= T_0\left(L \circ \dot{\sigma_.}(t)\right)(1)\\ &= T_{\dot{\gamma}(t)}L\left(T_0\left(\dot{\sigma_.}(t)\right)(1)\right).\end{aligned}$$

[1] Pour le cas général, on se reportera à
H. Goldschmidt & S. Sternberg, The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23, 1, 1973, pp. 203-267.

[2] Les références 1,2,3 fournissent une liste de situations concrètes classiques qui motivent ce problème.

Le vecteur $Z_t = T_0\left(\dot{\sigma}_{\cdot}(t)\right)(1)$ appartient à $T_{\dot{\sigma}_0(t)}TM = T_{\dot{\gamma}(t)}TM$, ce qui définit un champ Z sur TM le long de $\dot{\gamma}$.

On a donc $p_{TM}(Z_t) = \dot{\gamma}(t)$ et $Tp_M(Z_t) = T_0\left(p_M \circ \dot{\sigma}_{\cdot}(t)\right) = T_0(\sigma_t(u))(1) = \dot{\sigma_t}(0)$.

Notons au passage que les coordonnées locales de Z_t pour une carte ϕ de TM sont

$$Z_t = ((q,v),(Q,V)) = \left(\phi\left(\dot{\gamma}(t)\right), \left(\frac{\partial \sigma^\phi}{\partial u}(t,0), \frac{\partial^2 \sigma^\phi}{\partial t \partial u}(t,0)\right)\right).$$

Si γ est un extrémum de Φ, on peut donc écrire plus brièvement $\int_0^1 dL(Z) = 0$.

Etape 2. Si γ est un extrémum de Φ, dans l'ensemble des variations à extrémités fixes, démontrons la relation

$$\int_0^1 \left(i_{\ddot{\gamma}}\mathbf{d}\widehat{d}L + dL - d(\mathcal{V}.L)\right)(Z) = 0.$$

Compte tenu de l'étape 1, on est ramené à $\int_0^1 \left(i_{\ddot{\gamma}}\mathbf{d}\widehat{d}L - d(\mathcal{V}.L)\right)(Z) = 0$.

La formule de Cartan (Prop. 2-133 p. 231) s'écrit $\mathcal{L}_Z = i_Z\mathbf{d} + \mathbf{d}i_Z$. Ceci suppose que le champ Z est prolongé à un ouvert de TM contenant l'arc $\dot{\gamma}$ (Lemme 4-1 et compacité).

Il en résulte que

$$\int_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}_Z\widehat{d}L = \int_{\dot{\gamma}} i_Z\mathbf{d}\widehat{d}L + \int_{\dot{\gamma}} \mathbf{d}i_Z\widehat{d}L.$$

Or, d'une part, $\int_{\dot{\gamma}} i_Z\mathbf{d}\widehat{d}L = \int_0^1 \mathbf{d}\widehat{d}L\left(Z, \ddot{\gamma}\right)$,
d'autre part

$$\begin{aligned}
\int_{\dot{\gamma}} \mathbf{d}i_Z\widehat{d}L &= \int_0^1 \dot{\gamma}^*\mathbf{d}i_Z\widehat{d}L \\
&= \int_0^1 \mathbf{d}\dot{\gamma}^* i_Z\widehat{d}L \\
&= \dot{\gamma}^* i_Z\widehat{d}L \,|_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

On a appliqué la formule de Stokes et l'hypothèse de variation à extrémité fixe.

Il reste à exprimer $\int_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}_Z\widehat{d}L$.

En remarquant que $\widehat{d}L(\Upsilon) = (\mathcal{V}.L)(Tp_M(\Upsilon))$ (il suffit de comparer les coordonnées locales), on obtient

$$\int_{\dot{\sigma_u}} \widehat{d}L = \int_0^1 \widehat{d}L\left(\ddot{\sigma_u}\right) = \int_0^1 (\mathcal{V}.L)\left(\dot{\sigma_u}\right).$$

Dérivons les deux membres au point $u = 0$.

Par définition de Z, $\int_0^1 \frac{d}{du}\left(\mathcal{V}.L \circ \dot{\sigma_u}\right)|_{u=0} = \int_0^1 d\left(\mathcal{V}.L\right)(Z)$.

On doit vérifier l'égalité $\int_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}_Z \widehat{d}L = \int_0^1 \mathcal{L}_Z \widehat{d}L\left(\ddot{\gamma}\right) = \int_0^1 \frac{d}{du}\left(\widehat{d}L\left(\ddot{\sigma_u}\right)\right)|_{u=0}$.

Or, $\mathcal{L}_Z \widehat{d}L\left(\ddot{\gamma}\right) = \frac{d}{du}\left(\widehat{d}L\left(\dot{\gamma}\right)\left(T\theta_u^Z \ddot{\gamma}\right)\right)|_{u=0}$, où θ_u^Z est le flot de Z (Def. 2-91), mais ce flot n'est autre que $\theta_u^Z \dot{\gamma} = \dot{\sigma_u}$, par définition de Z.

Etape 3. La 1-forme $i_{\ddot{\gamma}} \mathbf{d}\widehat{d}L + d\left(L - \mathcal{V}.L\right)$ est semi-basique sur TM. Ceci a été observé lorsque L est quadratique, dans la démonstration de la proposition 5-47 (Théorème fondamental de la dynamique, où l'on a prouvé qu'il s'gissait de la puissance virtuelle du champ des accélérations), mais cette hypothèse n'intervient pas dans le résultat ici, et la vérification est un simple calcul avec les expressions locales (§ 3-3-3-1, formule (39)).

Le couplage avec Z ne dépend donc que de $Tp_M\left(Z_t\right)$ qui est arbitraire, ce qui achève la démonstration compte tenu du Lemme classique de Du Bois-Reymond.

■